Филиал Государственного бюджетного профессионального образовательного учреждения Иркутской области «Иркутский колледж автомобильного транспорта и дорожного строительства» в поселке Улькан

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ОУД.05 Математика

по программе подготовки квалифицированных рабочих и служащих
15.01.31 Мастер контрольно-измерительных приборов и автоматики

2021 г.

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине разработаны на основе ФГОС СПО по профессии 15.01.31 Мастер контрольно-измерительных приборов и автоматики и рабочей программы дисциплины ОУД.05 Математика

Организация-разработчик: Филиал Государственного бюджетного профессионального образовательного учреждения Иркутской области «Иркутский колледж автомобильного транспорта и дорожного строительства» в поселке Улькан

Составитель:
Маринина Валентина Александровна, преподаватель 1КК.

Рассмотрены и одобрены на заседании методической комиссии
«Общеобразовательный, профессиональный цикл»
Методист _____ Баженова И.В.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических знаний. Практические задания выполняются студентом, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания. К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, студент получает перед занятием из методических рекомендаций к практическому занятию.

Методические указания по выполнению практических работ составлены в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» для оказания помощи обучающимся в организации и успешном выполнении практических работ по дисциплине «Математика» по профессии 15.01.31 Мастер контрольно-измерительных приборов и автоматики.

При изучении учебной дисциплины на проведение практических занятий отводится 110 часов.

Освоение содержания учебной дисциплины «Математика» обеспечивает достижение обучающимися следующих ***результатов:***

***личностных*:**

- сформированность представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- понимание значимости математики для научно-технического прогресса, сформированность отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей;
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;
- овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественнонаучных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения

образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;

- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;
- готовность и способность к самостоятельной, творческой и ответственной деятельности;
- готовность к коллективной работе, сотрудничеству со сверстниками в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности;
- отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем;

метапредметных:

- умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;
- умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;
- владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;
- готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;
- владение языковыми средствами – умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;
- владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и

оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств их достижения;

- целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность и интуиция, развитость пространственных представлений; способность воспринимать красоту и гармонию мира;

предметных:

- сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;
- сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;
- владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
- владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;
- сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;
- владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;
- сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

- владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.

Критерии оценки за выполнение практического задания

При оценке работ, включающих в себя проверку вычислительных навыков, ставятся следующие отметки:
“5”- работа выполнена безошибочно;
“4”- в работе допущены 1 грубая и 1-2 негрубые ошибки;
“3”- в работе допущены 2-3 грубые или 3 и более негрубые ошибки;
“2”- если в работе допущены 4 и более грубых ошибок.
При оценке работ, состоящих только из задач, ставятся следующие отметки:
“5”- если задачи решены без ошибок;
“4”- если допущены 1-2 негрубые ошибки;
“3”- если допущены 1 грубая и 3-4 негрубые ошибки;
“2”- если допущено 2 и более грубых ошибок.
При оценке работ, состоящих из заданий обязательного уровня и дополнительных заданий, ставятся следующие отметки:
“5”- если выполнено не менее 80% от всей работы;
“4”- если выполнено от 66% до 79% от всей работы;
“3”- если выполнено от 50% до 65% от всей работы, или все задания обязательного уровня;
“2”- во всех других случаях, не соответствующих вышеперечисленным.

Перечень практических работ

№ п/п	Название практической работы	Количество часов
№ 1	Выполнение арифметических действий над числами	3
№ 2	Нахождение приближенных значений величин и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной). Сравнение числовых выражений	3
№ 3	Вычисление и сравнение корней	1
№ 4	Выполнение расчетов с радикалами.	1
№ 5	Решение иррациональных уравнений	1
№ 6	Нахождение значений степеней с рациональными показателями.	1
№ 7	Преобразования выражений, содержащих степени. Сравнение степеней.	1
№ 8	Решение прикладных задач	2
№ 9	Решение показательных уравнений.	1
№ 10	Нахождение значений логарифма по произвольному основанию. Правила действия с логарифмами (свойства логарифмов)	1
№ 11	Вычисление и сравнение логарифмов.	1
№ 12	Решение задач по теме: Переход от одного основания к другому.	1
№ 13	Логарифмирование и потенцирование выражений.	1
№ 14	Решение логарифмических уравнений.	1
№ 15	Выполнение приближенных вычислений и решение прикладных задач.	1
№ 16	Решение задач по теме: «Признаки взаимного расположения прямых»	1
№ 17	Решение задач по теме: «Угол между прямыми»	1
№ 18	Решение задач по теме: «Взаимное расположение прямых и плоскостей»	1
№ 19	Решение задач по теме: «Признак и свойства параллельных плоскостей»	1
№ 20	Решение задач по теме: «Перпендикуляр и наклонная к плоскости»	1
№ 21	Нахождение расстояний от точки до плоскости, от прямой до плоскости, между плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между произвольными фигурами в пространстве»	2
№ 22	Решение задач по теме: «Теорема о трех перпендикулярах»	1
№ 23	Решение задач по теме: «Угол между прямой и плоскостью»	1
№ 24	Решение задач по теме: «Признаки и свойства перпендикулярных плоскостей»	1
№25	Решение задач по теме: «Параллельное проектирование и его свойства»	1
№ 26	Решение задач по теме: «Взаимное расположение пространственных фигур»	1
№ 27	Выполнение заданий по теме: Правила комбинаторики.	1
№28	Решение задач по теме: Размещения.	1
№29	Решение задач по теме: Сочетания и перестановки.	1

№30	Решение задач по теме: «Бином Ньютона. Треугольник Паскаля».	1
№31	Решение прикладных задач.	1
№32	Решение комбинаторных задач.	1
№33	Выполнение заданий по теме: Декартова система координат в пространстве.	1
№34	Решение задач по теме: Расстояние между точками.	1
№35	Решение задач по теме: Уравнение окружности, сферы, плоскости.	1
№36	Решение задач по теме: Векторы. Действия с векторами.	1
№37	Решение задач по теме: Действия с векторами, заданными координатами.	1
№38	Выполнение заданий по теме: Скалярное произведение векторов.	1
№39	Выполнение заданий по теме: Векторное уравнение прямой и плоскости.	1
№40	Использование векторов при доказательстве теорем стереометрии.	1
№41	Решение задач по теме «Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой»	1
№42	Решение задач по теме «Основные тригонометрические тождества.	1
№43	Решение задач по теме: Формулы сложения.	1
№44	Решение задач по теме: Формулы удвоения.	1
№45	Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.	1
№46	Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.	1
№47	Решение задач по теме «Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс».	1
№48	Решение задач по теме: Простейшие тригонометрические уравнения.	1
№49	Решение задач по теме Тригонометрические уравнения.	1
№50	Решение задач по теме: Простейшие тригонометрические неравенства.	1
№51	Выполнение заданий по теме: «Определение функций».	1
№52	Построение и чтение графиков функций.	1
№53	Преобразование графиков функций.	1
№54	Нахождение зависимостей между переменными в реальных процессах из смежных дисциплин.	1
№55	Выполнение заданий по теме: «Непрерывные и периодические функции».	1
№56	Выполнение заданий по теме: «Исследование функций».	1
№57	Решение задач по теме: «Свойства линейной, квадратичной, кусочно-линейной и дробно-линейной функций».	1
№58	Выполнение заданий по теме: *Обратные функции и их графики.*	1
№59	Решение показательных и логарифмических неравенств.	1

№60	Выполнение заданий по теме: «Свойства и графики синуса, косинуса».	1
№61	Выполнение заданий по теме: «Свойства и графики тангенса и котангенса».	1
№62	Решение задач по теме: «Обратные функции и их графики. Обратные тригонометрические функции»	1
№63	Решение тригонометрических уравнений и неравенств.	1
№64	Выполнение заданий по теме: «Различные виды многогранников, их изображения».	1
№65	Выполнение заданий по теме: «Виды симметрий в пространстве».	1
№66	Выполнение заданий по теме: «Симметрия многогранников и тел вращения».	1
№67	Выполнение заданий по теме: «Сечения, развертки многогранников».	1
№68	Выполнение заданий по теме: «*Площадь поверхности».*	1
№69	*Вычисление площадей и объемов пространственных тел.*	3
№70	Выполнение заданий по теме: Числовая последовательность, способы ее задания.	1
№71	Выполнение заданий по теме: Предел последовательности.	1
№72	Выполнение заданий по теме: бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.	1
№73	Вычисление производных некоторых элементарных функций.	1
№74	Выполнение заданий по теме: Правила и формулы дифференцирования	2
№75	Выполнение заданий по теме: Уравнение касательной в общем виде.	1
№76	Выполнение заданий по теме: Геометрический смысл производной.	1
№77	Выполнение заданий по теме: Физический смысл производной.	1
№78	Нахождение промежутков возрастания и убывания функции.	1
№79	Нахождение экстремумов функции.	1
№80	Нахождения наибольшего и наименьшего значения функции.	1
№81	Построение графиков функций с помощью производной	2
№82	Выполнение заданий по теме: Правила нахождения первообразных.	1
№83	Вычисление интегралов.	1
№84	Выполнение заданий по теме: Теорема Ньютона- Лейбница	1
№85	Вычисление площади криволинейной трапеции	1
№86	Применение интеграла для вычисления физических величин и площадей	1
№87	Выполнение заданий по теме: Свойства вероятностей	1
№88	Выполнение заданий по теме: Теорема о сумме вероятностей	1
№89	Вычисление вероятностей	1
№90	Решение прикладных задач.	1
№91	Представление числовых данных. Прикладные задачи	2
№92	Нахождение корней уравнений. Равносильность уравнений.	2

	Преобразование уравнений	
№93	Нахождение основных приемов решения уравнений	2
№94	Решение систем уравнений	1
№95	Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств	2
Итого		110

Практическая работа №1 (3 часа)

Тема: Выполнение арифметических действий над числами**.**

Цель: Знать, что такое натуральное, целое, рациональное число, периодическая дробь; уметь записывать бесконечную десятичную дробь в виде обыкновенной, уметь выполнять действия с десятичными и обыкновенными дробями.

Теоретические сведения к практической работе

Первоначально под числом понимали лишь натуральные числа. Которых достаточно для счёта отдельных предметов.

Множество N = {1; 2; 3...} натуральных чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения. Это значит, что сумма и произведение натуральных чисел являются числами натуральными.

Однако разность двух натуральных чисел уже не всегда является натуральным числом.

(Приведите примеры: 5 – 5 = 0; 5 – 7 = – 2, числа 0 и – 2 не являются натуральными).

Так, результат вычитания двух одинаковых натуральных чисел приводит к понятию нуля и введению множества целых неотрицательных чисел Z0 = {0; 1; 2;...}.

Чтобы сделать выполнимой операцию вычитания, вводят отрицательные целые числа, то есть числа, противоположные натуральным. Таким образом получают множество целых чисел Z = {...; -3; -2; -1; 0; 1; 2;...}.

Чтобы сделать выполнимой операцию деления на любое число, не равное нулю, необходимо к множеству всех целых чисел присоединить множество всех положительных и отрицательных дробей.

При выполнении четырёх арифметических действий (кроме деления на нуль) над рациональными числами всегда получаются рациональные числа.

Каждое рациональное число можно представить в виде периодической десятичной дроби.

Вспомним, что такое периодическая дробь. Это бесконечная десятичная дробь, у которой начиная с некоторого десятичного знака повторяется одна и та же цифра или несколько цифр – период дроби. Например, 0,3333…= 0,(3);

1,057373…=1,05(73).

Читаются эти дроби так : “0 целых и 3 в периоде”, “1 целая, 5 сотых и 73 в периоде”.

Запишем рациональные числа в виде бесконечной периодической десятичной дроби:

натуральное число 25 = 25,00…= 25,(0);

целое число -7 = -7,00…= -7,(0).

Одним из самых основных понятий в математике является число.

Натуральные числа: $N = \{1,2,3,4,\ldots\}$.

Целые числа: $Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$.

Рациональные числа: Q = { m/n, где m – целое число, а n – натуральное}.

Можно также считать, что **рациональные числа** - это бесконечные периодические десятичные дроби.

Иррациональные числа – это числа, не представимые в виде обыкновенной дроби, т.е. бесконечные непериодические десятичные дроби. Например: π = 3,1416…, e = 2,7182…; $\sqrt{2}$=1,4142…

Все эти числа называют **действительными числами** – R.

Определение модуля числа: $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$.

Основное свойство дроби: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

Основное свойство пропорции: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

Определение процента: 1% - это 1/100 часть числа.

Содержание практической работы

Часть 1

№1. Записать в виде десятичной дроби:

1) $\frac{3}{5}$ 2) $\frac{3}{5}$ 3) $-8\frac{2}{7}$ 4) $\frac{8}{11}$

№2. Выполнить действия и записать результат в виде десятичной дроби:

1) $\frac{2}{11}+\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{3}+1{,}25$; 3) $\frac{3}{14}\cdot 1{,}05$; 4) $\frac{8}{13}-\frac{2}{3}$

№3. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь:

1) 0,(6); 2) 0,1(2); 3) -3,(27) ; 4) 1,(55); 5) -0,(8).

Образец выполнения задания: -2,3(82)

Решение:

X = -2,3(82) = -2,3828282…

10x = -23,828282…

1000x = -2382,8282…

1000x – 10x = -2382,8282…– (23,828282…)

990x = – 2359

$$X = -\frac{2359}{990} = -2\frac{379}{990}.$$

Ответ: $-2\frac{379}{990}$

№4. Вычислить:

1) (20,88 : 18 + 45 : 0,36) : (19,59 + 11,95);

2) $\frac{7}{36}\cdot 9 + 8\cdot\frac{11}{32} + \frac{9}{10}\cdot\frac{5}{18}$.

№5.Вычислить:

а) $(3\frac{4}{25} + 0{,}24)2{,}15 + (5{,}1625 - 2\frac{3}{16})\frac{2}{5}$

б) $0{,}364 : \frac{7}{25} + \frac{5}{16} : 0{,}125 + 2\frac{1}{2}\cdot 0{,}8.$

Часть 2

Пример 1. Сократить дробь $\frac{100}{250}$.

Решение:

В соответствии с основным свойством дроби $\frac{100}{250} = \frac{50\cdot 2}{50\cdot 5} = \frac{2}{5}$.

Ответ: $\frac{2}{5}$.

Пример 2. Вычислите $\left(\frac{29}{35} - \frac{3}{7}\right)\cdot 7$.

Решение:

$$\left(\frac{29}{35} - \frac{3}{7}\right)\cdot 7 = \left(\frac{29-15}{35}\right)\cdot 7 = \frac{14\cdot 7}{35} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5} = 2{,}8.$$

Ответ: 2,8.

Пример 3. Влажность сухой цементной смеси на складе составляет 18%. Во время перевозки из-за дождей влажность смеси повысилась на 2%. Найдите массу привезенной смеси, если со склада было отправлено 400 кг.

Решение:

400 · 0,18 = 72 (кг) - масса влаги в цементе на складе;
400 – 72 = 328 (кг) - масса цемента без влаги (сухого);
328 · 100 : 80 = 410 (кг) - масса привезённой смеси со склада.

Ответ: 410 кг.

Пример 4. Вычислите |-9,6|+|-7,4|-2.

Решение:

На основании определения модуля
|-9,6|+|-7,4|-2 = 9,6 + 7,4 – 2 = 15.

Ответ: 15.

Пример 5. Найти x, если $(-7{,}5):\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x = 22{,}5:(-0{,}5)$

Решение:

22,5: (– 0,5) = – 225 : 5 = – 45;
15 · x = – 45;
x = – 45 : 15 = – 3.

Ответ: – 3.

Содержание практической работы

№1. Выполните действия:

1) (2,125 · 0,32 – 1,93): 2,5 – 0,5.
2) 6,75 – 6,75 · (0,45 – 6,72 : 6,4).
3) $\dfrac{0{,}15-0{,}15\cdot 6{,}4}{-\frac{3}{8}+0{,}175}$.
4) $\dfrac{1{,}6\cdot 0{,}81-0{,}81}{3{,}57-3\frac{3}{4}}$.
5) $-0{,}09\cdot\left(-1\frac{1}{3}\right):\left(3{,}57:3{,}5-1{,}1\right)$.
6) $\left(1{,}68:1{,}6-1{,}5\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right):(-0{,}09)$.
7) $\left(\frac{11}{15}-1\frac{9}{10}+\frac{5}{8}\right)\cdot 0{,}9+0{,}1$.
8) $0{,}8+0{,}2:\left(\frac{7}{15}-1\frac{1}{12}+\frac{9}{20}\right)$.

9) $-1{,}5+0{,}5\cdot\left(\frac{8}{15}-1{,}7+\frac{1}{6}\right)$.

10) $\left(-3\frac{4}{15}-\frac{3}{20}+\frac{5}{12}\right)\cdot 0{,}6-0{,}6$.

№2.Вычислить 15% от 84.

№3.Найти число, если 8% его равны 24.

№4. На сколько процентов уменьшится произведение двух чисел, если одно из них уменьшить на 25%, а другое – на 50%?

№5. Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 5%. Книга стоит 200 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу? 8.Всентябре 1кг слив стоил 60руб. В октябре сливы подорожали на 25%. Сколько рублей стоил 1кг слив после подорожания в октябре?

№6.Сколько процентов составляет 5кг от 40кг?

№7. План выпуска деталей 60 штук, а изготовлено 45. Вычислите процент выполнения плана.

№8. Комбайн убрал в первый день $\frac{5}{12}$ поля, а на другой день 21га. Какова площадь поля?

№9. Представьте в виде бесконечной десятичной дроби $\frac{5}{9}$.

Практическая работа №2 (3 часа)

Тема: Нахождение приближенных значений величин и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной). Сравнение числовых выражений.

Цель: Знать правила действия над приближенными числами без точного учета погрешностей.

Теоретические сведения к практической работе

Правила для выполнения действий без точного учета погрешностей:

1. При сложении, вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их имеется в данном, с наименьшим числом десятичных знаков.

2. При умножении и делении приближенных чисел в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеется в данном с наименьшим числом значащих цифр.

3. При возведении в квадрат и куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеется в основании степени.

4. При извлечении квадратных и кубических корней в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеется в подкоренном числе.

5. При выполнении промежуточных действий в результате следует сохранять одну лишнюю (запасную) цифру, которую в окончательном результате отбрасывают.

Определение: *Цифры, записанные справа от запятой, называются десятичными знаками числа.*

Определение: *Значащими цифрами числа называются все его верные цифры, кроме нулей, записанных левее первой отличной от нуля цифры.*

Комплексное число – это выражение вида

$$z = x + iy, \qquad (1.1)$$

где *x, y* – вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – *мнимая единица*. Первое из вещественных чисел, *x*, называется *вещественной (действительной) частью* комплексного числа (используется обозначение $x = \operatorname{Re} z$); второе, *y*, - *мнимой частью* ($y = \operatorname{Im} z$). Выражение (1.1) называют *алгебраической формой записи комплексного числа*.

Числом, *сопряженным* к $z = x + iy$, называют число вида $\bar{z} = x - iy$. Используя формулу разности квадратов, получаем, что $z\bar{z} = x^2 + y^2$. Можно доказать, что корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два сопряженных комплексных числа.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$.

Решение. Дискриминант данного уравнения: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 36 - 72 = -36$ меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

$x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \dfrac{6 \pm 6\,i}{2}$, т.е. $x_1 = 3 + 3i$; $x_2 = 3 - 3i$.

Справедливы следующие *правила арифметических действий над комплексными числами* $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ (осуществляется сложение или вычитание алгебраических двучленов и приведение подобных);

2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ (осуществляется перемножение алгебраических двучленов и приведение подобных с учетом того, что $i^2 = -1$);

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ (эта операция возможна только в случае, когда $z_2 \neq 0 + i0 = 0$).

Пример 2. Вычислить $z = \dfrac{2-7i}{3+4i}$ и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

Решение. Действуя в соответствии с правилами получаем:

$$z = \frac{2-7i}{3+4i} = \frac{(2-7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-8i-21i+28i^2}{9-16i^2} = \frac{6-29i-28}{9+16} = \frac{-22-29i}{25} = -\frac{22}{25} - \frac{29}{25}i;$$

поэтому $\operatorname{Re} z = -\dfrac{22}{25}$, $\operatorname{Im} z = -\dfrac{29}{25}$.

Содержание практической работы

Часть 1

Применив правила для выполнения действий без точного учета погрешностей, выполните действия.

№1. Найти сумму $x + y$ и разность $x - y$, если:

а) $x \approx 1{,}34$; $y \approx 2{,}30$; б) $x \approx 4{,}331$; $y \approx 5{,}7$;

в) $x \approx 2{,}0 \cdot 10^3$; $y \approx 1{,}25 \cdot 10^2$; г) $x \approx 1{,}25 \cdot 10^2$; $y \approx 7{,}1 \cdot 10^{-1}$

№2. Найти произведение $x \cdot y$ и частное $\dfrac{x}{y}$, если

а) $x \approx 1{,}26$; $y \approx 2{,}10$; б) $x \approx 1{,}2 \cdot 10^2$; $y \approx 3 \cdot 10^2$;

в) $x \approx 25{,}678$; $y \approx 1{,}23$; г) $x \approx 4{,}8 \cdot 10^2$; $y \approx 1{,}331 \cdot 10^{-2}$

№3. Найдите значение выражения $\frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$ для $x \approx 1{,}34$; $y \approx 2{,}30$. Для вычисления рекомендуется пользоваться калькулятором.

№4. Вычислите, ответ округлите до 0,001.

1 вариант	**2 вариант**
а) $\frac{1{,}9 \cdot 6{,}3 \cdot 3{,}05}{5{,}3 \cdot 125}$	а) $\frac{5{,}8 \cdot 6{,}55 \cdot 4{,}05}{12{,}4 \cdot 215}$
б) $\frac{0{,}85^2 \cdot \sqrt[3]{5{,}35}}{\sqrt{0{,}825}}$	б) $\frac{0{,}65 \cdot \sqrt{7{,}45}}{\sqrt[3]{3{,}62}}$
в) $\frac{tg15^\circ \cdot \sqrt{\sin 65^\circ}}{\cos 28^\circ}$	в) $\frac{\sin 25^\circ \cdot \sqrt{tg65^\circ}}{\cos 22^\circ}$
г) $\frac{0{,}815 \cdot 12{,}6 \cdot 5{,}05}{0{,}0854 \cdot 18{,}9}$	г) $\frac{0{,}0615 \cdot 19{,}8 \cdot 60{,}4}{3{,}08 \cdot 46{,}2}$

Часть 2

Задание 1. Вычислить, выписать вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел.

1) $(2-3i)-(1+i)(2i-1)$ 2) $\frac{2+3i}{1-i}$ 3) $6i+\frac{1+7i}{2-3i}$

4) $(3+i)\frac{1+i}{1-i}$ 5) $\frac{(1-i\sqrt{3})^2}{i-\sqrt{3}}$ 6) $(1+2i)^3-3$

7) $(1-i)^2+i^4$

Задание 2. Найти все корни уравнений:

1) $x^2+9=0$; 2) $x^2-3x+10=0$; 4) $x^2-2x+10=0$; 5) $x^2+2x+10=0$; 6) $x^4-16=0$ 7) $x^2+100=0$

Практическая работа №3 (1 час)

Тема: Вычисление и сравнение корней.

Цель работы: Применить умения по выполнению расчетов с радикалами.

Теоретические сведения к практической работе

Степень с натуральным показателем

Пусть a - действительное число, а n - натуральное число, больше единицы. n - *й степенью числа* a называют произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}.$$

Если $n = 1$, то полагают $a^1 = a$.

Справедливы следующие свойства степени с натуральным показателем:

Если $a > 0$,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn},$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n,$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0.$$

По определению: если $a \neq 0$, то

$$a^0 = 1,$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Арифметический корень

Если $a \geq 0$, n - натуральное число, больше единицы, то существует, и только одно, неотрицательное число x такое, что выполняется равенство $x^n = a$. Это число называется *арифметическим корнем* n - й степени из неотрицательного числа a и обозначается $\sqrt[n]{a}$.

Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то справедливы следующие свойства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0,$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a},$$

$$\sqrt[nk]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Полагают по определению: если $a \geq 0$, m, n - натуральные числа, $n \geq 2$, то

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Нецелая степень отрицательного числа не имеет смысла.
Полезно знать свойства

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,$$

$$\left(\sqrt{a^2}\right) = |a|.$$

Для рациональных показателей свойства степеней остаются теми же.
При выполнении практической работы рассмотрите следующие примеры:

Пример 1:

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3\cdot 2]{8^2} = \sqrt[6]{64}.$$

2. Величина корня не изменится, если показатель степени уменьшить в n раз и одновременно извлечь корень n-й степени из подкоренного количества:

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m:n]{\sqrt[n]{a}}$$

Пример 2.

$$\sqrt[6]{8} = \sqrt[6:3]{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$$

Замечание. Это свойство останется в силе и в том случае, когда число m/n не будет целым; точно так же оба вышеуказанных свойства сохранят силу и для n дробного. Но для этого нужно сначала расширить понятие степени и корня, введя дробные показатели.

3. Корень из произведения нескольких сомножителей равен произведению корней той же степени из этих сомножителей:

$$\sqrt[m]{abc\ldots} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c\ldots}$$

Пример 3.

$$\sqrt[3]{a^6b^2} = \sqrt[3]{a^6}\ \sqrt[3]{b^2} = a^2\ \sqrt[3]{b^2}$$

Последнее преобразование основывается на свойстве 2.

Пример 4.

$$\sqrt{48} = \sqrt{16\cdot 3} = \sqrt{16}\ \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Обратно, произведение корней одной и той же степени равно корню той же степени из произведения подкоренных количеств:

$$\sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b}\ \sqrt[m]{c\ldots} = \sqrt[m]{abc\ldots}$$

Пример 5.

$$\sqrt{a^3b}\cdot\sqrt{ab^3} = \sqrt{a^4b^4} = a^2b^2$$

4. Корень от частного равен частному от деления корня из делимого на корень из делителя (показатели корней разумеются одинаковыми):

$$\sqrt[m]{a:b}=\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}$$

Обратно: $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a:b}$

Пример 6.

$$\sqrt[3]{27:4}=\sqrt[3]{27}:\sqrt[3]{4}=3:\sqrt[3]{4}$$

5. Чтобы возвести корень в степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное количество:

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a^n}$$

Обратно, чтобы извлечь корень из степени, достаточна, возвести в эту степень корень из основания степени:

$$\sqrt[m]{a^n}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

Пример 7.

$$\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^2=\sqrt[3]{a^4b^2}=\sqrt[3]{a^3\cdot ab^2}=a\sqrt[3]{ab^2}$$

.

$$\sqrt{27}=\sqrt{3^3}=\left(\sqrt{3}\right)^3$$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1.Перечислите свойства степени с натуральным показателем?

2.Перечислите свойства арифметического корня?

Содержание практической работы

Вариант I

№1. Вычислить: $\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{9}$

№2. Вычислить: $-2\sqrt[4]{16}$

№3. Вычислить: $\sqrt[3]{0,2^3\cdot 5^6}$

№4. Решить уравнение: $x^6=64$

№5. Вычислить:

Вариант II

№1. Вычислить: $\sqrt[3]{2^6\cdot 0,5^3}$

№2. Вычислить $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$

№3. Вычислить: $-6\sqrt[3]{8}$

№4. Решить уравнение: $x^5=32$

№5. Вычислить:

$\sqrt[4]{8\cdot 3}\cdot\sqrt[4]{2\cdot 27}=$

№6. Преобразовать выражение:

$\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=$

№7. Найти значение выражения:

$\sqrt[3]{8-\sqrt{37}}\cdot\sqrt[3]{8+\sqrt{37}}$

№8Вычислить значения выражений:

А) $\dfrac{26^9}{13^8\cdot 8^3}$

Б) $\left(\left(6^{4/3}\right)^{3/2}+(0{,}25)^{-1}\right)\cdot(-0{,}5)^3$

№9 Вычислить без помощи микрокалькулятора:

А) $\sqrt[4]{15\dfrac{5}{8}}:\sqrt[4]{\dfrac{2}{5}}$

Б) $\sqrt[3]{\dfrac{23}{64}+\sqrt{\dfrac{5}{48^2-32^2}}}$

$\sqrt[5]{32\cdot 7^2}\cdot\sqrt[5]{7^3}$

№6. Преобразовать выражение:

$\sqrt[6]{2\cdot\sqrt[5]{2}}$

№7.Найти значение выражения:

$\sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}$

№8Вычислить значения выражений:

А) $\dfrac{12^9}{2^{15}\cdot 3^7}$

Б) $\left(\left(5^{8/7}\right)^{7/4}-\dfrac{\left(2^{-2}\right)^{-3}}{32}\right)\cdot(46)^{-1}$

№9 Вычислить без помощи микрокалькулятора:

А) $\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{6\dfrac{3}{4}}$

Б) $\sqrt{\dfrac{9}{16}\sqrt{\dfrac{33^2-25^2}{29}}}$

Практическая работа №4 (1 час)

Тема: Выполнение расчетов с радикалами.

Цель работы: закрепить понятия степени числа с действительным показателем, научиться применять свойства степени с действительным показателем и корня n-ой степени.

Теоретические сведения к практической работе

1. Понятие степени:

Выражение вида a^n - называется степенью числа, где a – основание степени; n – показатель степени.

2. Степень с отрицательным показателем:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $\left(\frac{a}{в}\right)^{-n} = \left(\frac{в}{a}\right)^{n}$, $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Все формулы читаются и выполняются в обоих направлениях.

3. Степень с дробным показателем:

Во всех нижеприведенных формулах символ $\sqrt{\ }$ означает арифметический корень (подкоренное выражение положительно), если корень имеет четную степень.

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, корень энной степени из числа а в эмной, равен число а с дробным показателем $\frac{m}{n}$.

4. Корень n-ой степени из числа а в n-ой степени, равен самому числу а:

$\sqrt[n]{a^n} = a$, пример $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$.

5. Число с нулевой степенью

$a^0 = 1$, любое число в нулевой степени равно 1.

Корни натуральной степени из числа и их свойства

1 ^{0}. Число можно вынести из-под корня, если показатель корня и показатель числа имеют одну и ту же степень.

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Образец: $\sqrt[7]{128} = \sqrt[7]{2^7} = 2$.

2 ^{0}. Из под корня можно вынести отрицательное число , если степень корня нечетная (3, 5, 7, и т.д.).

Образец: $\sqrt[3]{-125} = -5$, $\sqrt[3]{-0{,}008} = -0{,}2$.

$\sqrt[4]{-81} =$ это выражение не имеет смысла (на поле действительных чисел).

3 ^{0}. Корень из произведения равен произведению корней:

$$\sqrt[n]{a \cdot в \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{в} \cdot \sqrt[n]{c}.$$

4 ^{0}. Корень из дроби равен корню из числителя и корню из знаменателя.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{в}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{в}}$$

5 ^{0}. Чтобы извлечь корень из корня, надо перемножить показатели корней.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a},$$

Образец: $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2 \cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$.

6 ^{0}. Степень коня и степень показателя можно уменьшить, если они имеют общий делитель.

$$\sqrt[к \cdot n]{a^{к \cdot m}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Образец: $\sqrt[6]{16} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^4} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^{2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Содержание практической работы

1 вариант

1. **Установите соответствие:**

При умножении степеней с равными основаниями	Основания умножаются, а показатель остаётся прежним
При делении степеней с равными основаниями	Основания делятся, а показатель остаётся прежним
При возведении степени в степень	Основание остаётся прежним, а показатели умножаются
При умножении степеней с равными показателями	Основание остаётся прежним, а показатели вычитаются
При делении степеней с равными	Основание остаётся прежним, а

показателями	показатели складываются

2. Вычислите:

а) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} : \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$;

б) $125^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} - 216^{\frac{1}{3}}$

3. Упростите выражение $\frac{1}{x^{-1}} : \frac{1}{x^{-4}}$ и найдите его значение при x = 2.

4. Решив уравнения и составив слово «абвгдеж», используя дешифратор, вы узнаете имя этого ученого, который положил начало буквенных записей степени.

Л	Т	Н	Р	Ш	О	Ь	И	Е	Ф	К	А	Д
9/4	9	5	11	-2	4/9	20	5/3	1/3	1	3	8	64

а) $x^{1/3}=4$

б) $y^{-1}=3/5$

в) $a^{1/2}= 2/3$

г) $x^{-0,5}\, x^{1,5} = 1$

д) $y^{1/3} =2$

е) $a^{2/7}a^{12/7} = 25$

ж) $a^{1/2}$ **:** a = 1/3 .

5. Вычислить: $(0,001)^{-\frac{1}{3}} + 27^{-2\frac{1}{3}}$ + (60)5 ▪2 – 3–4 ▪ $81^{-\frac{3}{2}}$ ▪27

2 вариант

1. **Установите соответствие:**

При умножении степеней с равными основаниями	Основания умножаются, а показатель остаётся прежним

При делении степеней с равными основаниями	Основания делятся, а показатель остаётся прежним
При возведении степени в степень	Основание остаётся прежним, а показатели умножаются
При умножении степеней с равными показателями	Основание остаётся прежним, а показатели вычитаются
При делении степеней с равными показателями	Основание остаётся прежним, а показатели складываются

2. Вычислите:

   а) $32^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{2}{3}} - 121^{\frac{1}{2}}$;

   б) $\left(\frac{1}{8} \cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$

3. Чему равно значение выражения $\frac{\left(a^2\right)^{-2} \cdot a^{-3}}{a^{-5}}$ при а = $\frac{1}{3}$.

4. Решив уравнения и составив слово «абвгдеж», используя дешифратор, вы узнаете имя этого ученого, который ввел название показатель.

Л	Т	Н	Р	Ш	О	Ь	И	Е	Ф	К	А	Д
9/4	9	5	11	-2	4/9	20	5/3	1/3	1	3	8	64

а) $-8^{1/3}$

б) $81^{1/2}$

в) $(3/5)^{-1}$

г) $(5/7)^{0}$

д) $27^{-1/3}$

е) $(2/3)^{-2}$

ж) $16^{1/2} * 125^{1/3}$.

5. Вычислить: $64^{-\frac{5}{6}} - (0{,}125)^{-\frac{1}{3}} - 32 \bullet 2 - 4 \bullet 16^{-1\frac{1}{3}} + (30)4 \bullet 4$.

Практическая работа №5 (1 час)

Тема: Решение иррациональных уравнений.

Цель: Научиться решать иррациональные уравнения и неравенства, используя основные определения и алгоритм для решения иррациональных уравнений и неравенств.

Теоретические сведения к практической работе

Уравнение, содержащую переменную под знаком корня, называется иррациональным.

<u>Алгоритм решения иррационального уравнения:</u>

1. Записать уравнение
2. Возвести обе части иррационального уравнения в нужную степень
3. Решить полученное уравнение
4. Проверить полученные корни уравнения, подставив их в исходное уравнение
5. Записать ответ

Примеры решения заданий:

Решить иррациональное уравнение:

1. $\sqrt{2x+1} = 3$

2. Возведем обе части уравнений в нужную степень, чтобы избавиться от квадратного корня. Эта степень равна 2.

   $(\sqrt{2x+1})^2 = 3^2$

   $2x+1 = 9$

3. Получили линейное уравнение, решаем его и находим корни:

   $2x = 9-1$

   $2x = 8$

   $x = 4$

4. Проверим полученный корень , подставив его в исходное уравнение.

   Проверка:

$$\begin{cases} x = 4 \\ \sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ \sqrt{9} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ 3 = 3 \end{cases}$$

Получилось верное равенство, значит полученный корень является корнем исходного уравнения

5. Записать ответ.

   Ответ: $x = 4$

Содержание практической работы

Вариант 1	Вариант 2
Решите иррациональные уравнения: 1. $\sqrt{x+1} = 6$ 2. $\sqrt{x^2 - 3} = 1$ 3. $\sqrt{4x+5} = x$ 4. $\sqrt{x-9} = \sqrt{1-x}$ 5. $x = \sqrt{14 - 2x + 3x^2}$ 6. $\sqrt{x^2 + 3x + 5} = 3$ 7. $\sqrt{3-2x} - \sqrt{1-x} = 1$ 8. $\sqrt{x+5} + \sqrt{20-x} = 7$ 9. $\sqrt{x} = x - 6$ 10. $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{2x-8}$	Решите иррациональные уравнения: 1. $\sqrt{x-3} = 4$ 2. $\sqrt{x^2 - 7} = 3$ 3. $\sqrt{5x-6} = x$ 4. $\sqrt{x-5} = \sqrt{3-x}$ 5. $2x - 1 = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$ 6. $\sqrt{4x^2 - 9x + 2} = 2$ 7. $\sqrt{12+x} - \sqrt{1-x} = 1$ 8. $\sqrt{5x} + \sqrt{14-x} = 8$ 9. $\sqrt{x} = x - 2$ 10. $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+19}$

Дополнительное задание:

Найти область определения выражений:

1. $\sqrt{x^2 - 9}$
2. $\sqrt{x^2 - 8x + 12}$
3. $\sqrt{x^2 - 10x + 9}$

Практическая работа №6 (1 час)

Тема: Нахождение значений степеней с рациональными показателями.

Цель: Закрепить понятия степени числа с рациональным показателем, научиться применять свойства степени с рациональным показателем и корня n-ой степени.

Теоретические сведения к практической работе

Степенью некоторого числа a (большего нуля) с рациональным показателем r = (m/n), где m – некоторое целое число, n – некоторое натурально число большее единицы, называется число $n\sqrt{(a^m)}$. Исходя из определения: $a^{(m/n)} = n\sqrt{(a^m)}$.

Для всех положительных r будет определена степень числа нуль. По определению $0^r = 0$. Отметим также, что при любом целом, любых натуральных m и n, и положительном a верно следующее равенство: $a^{(m/n)} = a^{((mk)/(nk))}$.

Например: $134^{(3/4)} = 134^{(6/8)} = 134^{(9/12)}$.

Из определения степени с рациональным показателем напрямую следует тот факт, что для любого положительного a и любого рационального r число a^r будет положительным.

Основные свойства степени с рациональным показателем

Для любых рациональных чисел p, q и любых a>0 и b>0 верны следующие равенства:

1. $(a^p)*(a^q) = a^{(p+q)}$;

2. $(a^p):(b^q) = a^{(p-q)}$;

3. $(a^p)^q = a^{(p*q)}$;

4. $(a*b)^p = (a^p)*(b^p)$;

5. $(a/b)^p = (a^p)/(b^p)$.

Содержание практической работы

Вариант 1	***Вариант 2***
Задание 1. *Вычислить:* *а)* $3 \cdot 16^{\frac{1}{2}}$; *б)* $27^{-\frac{1}{3}}$; *в)* $24 \div 8^{\frac{1}{3}}$; *г)* $(0{,}4)^{-2}$; *д)* $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + 5^{-1}$.	***Задание 1.*** *Вычислить:* *а)* $5 \cdot 9^{\frac{1}{2}}$; *б)* $125^{-\frac{1}{3}}$; *в)* $81 \div 27^{\frac{1}{3}}$; *г)* $(0{,}1)^{-3}$; *д)* $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + 4^{-1}$.
Задание 2. *Вычислить:*	***Задание 2.*** *Вычислить:*

а) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{9}$; *б)* $\sqrt[4]{0{,}5}\cdot\sqrt[4]{32}$; *в)* $\frac{\sqrt[3]{18}\cdot\sqrt[3]{12}}{\sqrt[5]{32}}$; *г)* $\sqrt[3]{0{,}125}$. ***Задание 3.*** *Найдите значение выражения* $b^{\frac{1}{9}}\cdot\left(b^{\frac{4}{9}}\right)^2$ *при* $b=9$. ***Задание 4.*** *Найдите значение выражения* $(9b)^2\div b^4\cdot b^3$ *при* $b=9$. ***Задание 5.*** *Найдите значение выражения* $\frac{\sqrt[12]{a}\cdot\sqrt[24]{a}}{a\cdot\sqrt[8]{a}}$ *при* $a=0{,}5$. ***Задание 6.*** *Вычислить:* $\sqrt[4]{64}\cdot\sqrt[12]{64}$.	*а)* $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$; *б)* $\sqrt[5]{0{,}5}\cdot\sqrt[5]{64}$; *в)* $\frac{\sqrt[4]{200}\cdot\sqrt[4]{50}}{\sqrt[4]{16}}$; *г)* $\sqrt[3]{0{,}027}$. ***Задание 3.*** *Найдите значение выражения* $b^{\frac{2}{7}}\cdot\left(b^{\frac{6}{7}}\right)^2$ *при* $b=2$. ***Задание 4.*** *Найдите значение выражения* $(4b)^2\div b^5\cdot b^3$ *при* $b=128$. ***Задание 5.*** *Найдите значение выражения* $\frac{\sqrt[14]{a}\cdot\sqrt[35]{a}}{a\cdot\sqrt[10]{a}}$ *при* $a=0{,}5$. ***Задание 6.*** *Вычислить:* $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[12]{81}$.
Вариант 3	***Вариант 4***
Задание 1. *Вычислить:* *а)* $14\cdot 8^{\frac{1}{2}}$; *б)* $32^{-\frac{1}{5}}$; *в)* $12\div 16^{\frac{1}{4}}$; *г)* $(1{,}2)^{-1}$; *д)* $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}+3^{-2}$. ***Задание 2.*** *Вычислить:* *а)* $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}$; *б)* $\sqrt[3]{0{,}5}\cdot\sqrt[3]{128}$; *в)* $\frac{\sqrt[5]{9}\cdot\sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{32}}$; *г)* $\sqrt{0{,}25}$. ***Задание 3.*** *Найдите значение выражения* $b^{\frac{1}{5}}\cdot\left(b^{\frac{9}{10}}\right)^2$ *при* $b=8$. ***Задание 4.*** *Найдите значение выражения* $(4b)^2\div b^6\cdot b^4$ *при* $b=64$. ***Задание 5.*** *Найдите значение выражения* $\frac{\sqrt[30]{a}\cdot\sqrt[45]{a}}{a\cdot\sqrt[18]{a}}$ *при* $a=2$. ***Задание 6.*** *Вычислить:* $\sqrt[9]{27}\cdot\sqrt[3]{9}$.	***Задание 1.*** *Вычислить:* *а)* $4\cdot 32^{\frac{1}{5}}$; *б)* $81^{-\frac{1}{2}}$; *в)* $32\div 16^{\frac{3}{4}}$; *г)* $(0{,}5)^{-2}$; *д)* $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}+8^{-1}$. ***Задание 2.*** *Вычислить:* *а)* $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}$; *б)* $\sqrt[3]{0{,}5}\cdot\sqrt[3]{54}$; *в)* $\frac{\sqrt[3]{100}\cdot\sqrt[3]{10}}{\sqrt[4]{81}}$; *г)* $\sqrt[4]{0{,}0625}$. ***Задание 3.*** *Найдите значение выражения* $b^{\frac{3}{10}}\cdot\left(b^{\frac{9}{10}}\right)^3$ *при* $b=8$. ***Задание 4.*** *Найдите значение выражения* $(4b)^2\div b^9\cdot b^7$ *при* $b=8$. ***Задание 5.*** *Найдите значение выражения* $\frac{\sqrt[21]{a}\cdot\sqrt[28]{a}}{a\cdot\sqrt[12]{a}}$ *при* $a=1{,}25$. ***Задание 6.*** *Вычислить:* $\sqrt[6]{216}\cdot\sqrt[4]{36}$.

Практическая работа №7 (1 час)

Тема: Преобразование выражений, содержащих степени. Сравнение степеней.

Цель: Овладение навыками вычисления и сравнения степеней с рациональными показателями преобразования выражений, содержащих степени.

Содержание практической работы

Вариант 1

1. Сравните с единицей следующие степени:

а) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$; б) $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{6}{7}}$; г) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{4}{5}}$; д) $(0{,}21)^{0{,}1}$.

2. Вычислите: а) $2^{2-3\sqrt{3}}\cdot 8^{\sqrt{3}}$; б) $\frac{12^{3+\sqrt{5}}}{3^{2+\sqrt{5}}\cdot 4^{1+\sqrt{5}}}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $8^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{1}{4}}+9^{\frac{1}{2}}$; *б)* $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right]^{\frac{2}{3}}\cdot 1{,}5^{-2}$; в) $2{,}5^{-2}\div\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}\right)^{-2}$

г) $125^{\frac{2}{3}}+16^{\frac{1}{2}}+343^{\frac{1}{3}}$ *д)* $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(0{,}81)^{-0{,}5}$; *е)*

$-0{,}3^{0}\cdot\left[\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}\right]^{-0{,}25}\cdot 0{,}36^{-0{,}5}\cdot\sqrt{0{,}0001^{-1}}$.

Вариант 2

1. Сравните с единицей следующие степени:

а) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{5}}$; б) $\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$; в) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{5}{6}}$; г) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{3}{4}}$; д) $(0{,}31)^{0{,}2}$.

2. Вычислите: а) $4^{1-2\sqrt{3}}\cdot 16^{\sqrt{3}}$; б) $\frac{15^{4+2\sqrt{3}}}{5^{6+2\sqrt{3}}\cdot 3^{3+2\sqrt{3}}}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $36^{\frac{3}{2}}+64^{\frac{2}{3}}-625^{\frac{1}{2}}$; *б)* $\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 0{,}6^{-2}$;

в) $16^{0{,}5}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$; *г)* $(-0{,}2)^{0}\cdot\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{4}\right)^{-0{,}25}\cdot 1{,}2^{-1}\cdot\sqrt{0{,}01^{-3}}$.

д) $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-4}\right)^{-0{,}75}\cdot 0{,}09^{-0{,}5}\cdot(-3)^{0}\cdot\sqrt{0{,}1^{-8}}$ е) $0{,}008^{-\frac{2}{3}}+0{,}064^{-\frac{1}{3}}-0{,}0625^{-\frac{3}{4}}\cdot 9$

Вариант 3

1. Сравните с единицей следующие степени:

а) $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$; б) $\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{3}{4}}$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{6}{7}}$; г) $\left(\frac{9}{5}\right)^{-\frac{4}{5}}$; д) $(0{,}27)^{0{,}3}$.

2. Вычислите: а) $5^{1-4\sqrt{3}}\cdot 25^{2\sqrt{3}}$; б) $\frac{18^{4+2\sqrt{3}}}{2^{5-2\sqrt{3}}\cdot 3^{3+2\sqrt{3}}}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $9^{-0,5}-\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}+(0,25)^{-1,5}$; *б)* $\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[3]{9}$; в) $\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 0,6^{-2}$

г) $0,125^{-\frac{1}{3}}+0,81^{-\frac{1}{2}}-0,027^{-\frac{2}{3}}$; *д)* $\left(16^{-0,25}-\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(16^{-0,25}+\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$.

е) $25^{\frac{1}{2}}-27^{\frac{2}{3}}+81^{\frac{13}{4}}$

Вариант 4

1. Сравните с единицей следующие числа:

а) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$; б) $\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{5}{6}}$; г) $\left(\frac{8}{3}\right)^{-\frac{4}{5}}$; д) $(0,41)^{0,1}$.

2. Вычислите: а) $9^{2-\sqrt{3}}\cdot 81^{\sqrt{3}}$; б) $\frac{250^{1+2\sqrt{3}}}{2^{6+2\sqrt{3}}\cdot 5^{3+2\sqrt{3}}}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $(0,04)^{-1,5}(0,125)^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}}$; *б)* $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{27}$;

в) $0,25^{-\frac{3}{2}}+3\cdot 0,0081^{-0,25}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$; *г)* $0,0016^{-\frac{3}{4}}+0,04^{-\frac{1}{2}}-0,216^{-\frac{2}{3}}\cdot 9$

д) $\left(\left(3\sqrt{3}\right)^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{0,5^{-1}}\right)\cdot\left(\left(3\sqrt{3}\right)^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{0,5^{-1}}\right)$.

е) $\sqrt{0,1^{-4}}\cdot\left(\frac{2}{13}\right)^{0}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right)^{-0,5}\div 0,81^{-0,5}$

Практическая работа №8 (2 часа)

Тема: Решение прикладных задач.

Цель: Повторение и систематизация знаний, умение и навыки применения свойств степеней при решении прикладных задач.

Теоретические сведения к практической работе

Свойства степеней: a и b – это любые положительные числа, а m и n - произвольные действительные числа:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$

$$a^m:a^n=a^{m-n}$$

$$\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$$

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

Примеры решения задач

Задача 1. На некотором лесном участке можно заготовить $2*10^5$ $м^3$ древесины, Ежегодный прирост деревьев равен 3%. Сколько можно заготовить древесины на этом участке через 4 года?

По формуле $A_n = A_0 * (1 + \frac{p}{100})^n$,где n – количество лет, – сколько древесины можно заготовить за 1 год, p – ежегодный прирост (%), найдем сколько древесины можно заготовить за 4 года.

$A= 2*10^5*(1+0,03)^4=2,25*10^5$ $м^3$

Ответ: 225000 кубических метров древесины можно заготовить на этом участке через четыре года.

Задача 2. Вкладчик поместил в банк 10000 р. Банк ежегодно начисляет вкладчику 3% от суммы вклада. Какую сумму денег получит вкладчик через 3 года и 5 месяцев.

$S = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$, где a - первоначальная сумма денег, p -число процентов, начисляемых банком в год, t - число лет, в течение которых деньги находились в банке.

$a = 10\,000,\ p = 3,\ t = 3\frac{5}{12}$

$S = 10\,000 \cdot 1{,}03^{3\frac{5}{12}}$.

Вычисления можно провести на микрокалькуляторе, имеющем клавишу y^x

Ответ: 11 062 р 70 к.

Пример 1	Пример 2
$3^{4x-1} = \frac{1}{9};$ $3^{4x-1} = 3^{-2};$ $4x - 1 = -2;$ $4x = -2 + 1;$ $4x = -1;$ $x = -\frac{1}{4}.$	$125^x = 25;$ $(5^3)^x = 5^2;$ $5^{3*x} = 5^2;$ $3 * x = 2;$ $x = \frac{2}{3};$

Содержание практической работы

1. Вычислить:

$a^2 \cdot a^3$; $a^{10} \cdot a^{15}$; $a^6 \cdot a^4$; $a^{12} \cdot a^5$.

$a^6 : a^4$; $a^{10} : a^3$; $a^6 : a^0$; $a^{11} : a$.

$(a^2)^2$; $(a^3)^3$; $(a^4)^5$; $(a^0)^2$.

$(2a^2)^2$; $(-2a^3)^3$; $(3a^4)^2$; $(-2a^2b)^4$

2. Вычислить:

A. $2^{5,3} \cdot 2^{-0,3}$

B. $7^{-\frac{1}{2}} \cdot 7^{3,5}$

C. $8^{2\frac{1}{3}} : 8^2$

D. $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6$

E. $(3^{2,7})^3 : 3^{5,1}$

F. $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$

3. Вычислить

$$\frac{5^{12} \cdot 4^3}{10^{10}}$$

4. Вычислить

1) $\left(4\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{81^{1,5}}{625}\right)^{\frac{1}{2}}$

2) $\left(5\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{32^{1,2}}{729}\right)^{\frac{1}{2}}$

3) $\left(3\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{0,5}}{21}}$

5. Сравнить

$(0,88)^{\frac{1}{6}}$ и $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}$

6. Решить показательные уравнения

1) $3^{5-2x}=81$ 2) $4^{8+5x}=1$ 3) $3^{2-x}=27$

7. Решить задачи

1. Вкладчик вложил в банк 5000 р. под 2% годовых. Сколько денег получит вкладчик через 3 года?

2. На некотором лесном участке можно заготовить $4*10^5$ $м^3$ древесины. Ежегодный прирост деревьев равен 4%. Сколько можно заготовить древесины на этом участке через 5 лет?

Практическая работа №9 (1 час)

Тема: Решение показательных уравнений.

Цель: Формирование умений решения простейших показательных уравнений.

Содержание практической работы

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
Решите уравнения: $6^{2x}=6^{\frac{1}{5}}$ $4^{-x}=\frac{1}{8}$ $10^{2x}=0{,}1\sqrt{1000}$ $2^x+2^{x-3}=18$ $64\cdot 2^{\sqrt{x-1}}=4^{\sqrt{x-1}}$	Решите уравнения: $3^x=27$ $10^x=0{,}001$ $\frac{1}{8}\cdot\sqrt{2^{x-1}}=4^{-1,25}$ $3^x+3^{x-2}=24$ $\left(\frac{1}{64}\right)^x=\sqrt{\frac{1}{8}}$	Решите уравнения: $7^{3x}=7^{10}$ $2^{\sqrt{x+1}}=\left(\frac{1}{32}\right)^{-1}$ $\frac{1}{8}\sqrt[4]{4^{3x-1}}=8^{-\frac{2}{3}}$ $2\cdot 3^{x+1}-3^x=9$ $5\sqrt{5^x}=\sqrt[3]{5}$	Решите уравнения: $4^{2+x}=1$ $(0{,}75)^{2x}=\frac{16}{9}$ $2^{x^2}\cdot 5^{x^2}=10^{-3}(10^{x-3})^2$ $0{,}5^{1-2x}+0{,}5^{3-2x}=48$ $\sqrt{3^x}=27^{-\frac{2}{3}}$
Решите неравенство: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+5}<32$.	Решите неравенство: $2^{5-6x}>\frac{1}{8}$.	Решите неравенство: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}>2^{-\frac{x}{2}}$	Решите неравенство: $\left(\frac{1}{3}\right)^x<\frac{1}{81}$.

Контрольные вопросы:
1. Какое уравнение называется простейшим показательным?
2. Сколько корней имеет уравнение?

Практическая работа №10 (1 час)

Тема: Нахождение значений логарифма по произвольному основанию. Правила действия с логарифмами (свойства логарифмов).

Цель: Закрепить понятие логарифма, научиться применять свойства логарифмов при решении логарифмических выражений; содействовать развитию умения анализировать, синтезировать, сравнивать; формировать и

развивать общеучебные умения и навыки: обобщение, поиск способов решения.

Теоретические сведения к практической работе

Логарифмом положительного числа b по основанию a (записывают $\log_a b$), где $a > 0$, $a \neq 1$, называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

Равенство $a^{\log_a b} = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, называют *основным логарифмическим тождеством*.

$x = \log_a b$ – корень уравнения $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Логарифм числа по основанию 10 называется *десятичным логарифмом*: $\log_{10} b = \lg b$.

Логарифм числа по основанию e называется *натуральным логарифмом*: $\log_e b = \ln b$.

$1)\ \log_a 1 = 0$ $2)\ \log_a a = 1$ $3)\ \log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$ $4)\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	$5)\ \log_a x^p = p \cdot \log_a x$ $6)\ \log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$ $7)\ \log_{a^n} x^p = \frac{p}{n} \log_a x$ $8)\ \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$ $9)\ \log_a \sqrt{b} = \frac{1}{2} \log_a b$	$10)\ \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $11)\ \log_a b \cdot \log_b a = 1$ $12)\ \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Примеры с решениями

1. Вычислить: 1) $\log_3 81$; 2) $\log_{\frac{1}{4}} 16$; 3) $\log_9 27$;

Решение.

1) $\log_3 81 = 4$, так как $3^4 = 81$.

2) Пусть $\log_{\frac{1}{4}} 16 = x$. Тогда по определению логарифма $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 16$, или $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^2$, откуда $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)^{=2}$, $x = -2$.

3) Пусть $\log_9 27 = x$. Тогда по определению логарифма $9^x = 27$, откуда $\left(3^2\right)^x = 3^3$, $3^{2x} = 3^3$, $2x = 3$, $x = 1{,}5$.

2. Найти: 1) $7^{\log_7 5}$; 2) $0{,}5^{0{,}5\log_{0,5}12}$; 3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_8 3}$.

Решение.

1) По определению логарифма (согласно основному логарифмическому тождеству) $1)7^{\log_7 5}=5;$

2) $0{,}5^{0{,}5\log_{0,5}12}=\left(0{,}5^{\log_{0,5}12}\right)^{0{,}5}=12^{0{,}5}=12^{\frac{1}{2}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3};$

3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_8 3}=\left(8^{-1}\right)^{\log_8 3}=\left(8^{\log_8 3}\right)^{-1}=3^{-1}=\frac{1}{3}.$

Содержание практической работы

1. Вычислить:

1) $\log_2 16;$ 2) $\log_{0,2} 0{,}04;$ 3) $\log_3 \frac{1}{81};$

4) $\log_{\frac{1}{3}} 9;$ 5) $\log_{23} 1;$ 6) $\log_5 \frac{1}{125}.$

2. Вычислите десятичные логарифмы:

1) $\lg 10000;$ 2) $\lg 0{,}1;$ 3) $\lg 0{,}0001;$ 4) $\lg\sqrt{10}$

3. Вычислите натуральные логарифмы:

1) $\ln e;$ 2) $\ln e^{\frac{1}{3}};$ 3) $\ln\sqrt{e};$

4) $\ln(\lg 10).$

4. Вычислите:

1) $\log_{\frac{1}{5}} 9+2\log_{\frac{1}{5}}\frac{5}{3};$ 2) $\log_7 196-2\log_7 2.$

5. Найдите значения выражений:

1) $\frac{25^{\log_5 2}+1}{49^{\log_7 4}};$ 2) $\frac{16^{0{,}5^{\log_4 10}}}{10^{\lg 4}+1};$

3) $\log_2 12+\log_2\frac{5}{3}+\log_2\frac{4}{5}$; 4) $3^{2-\log_3 5}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 5}$.

6. Вычислить:

1) $\log_9 45+\log_9 1{,}8$; 2) $\log_{11}\sqrt[5]{121}$; 3) $2\log_{0,3}3-\frac{1}{2}\log_{0,3}10000$.

7. Найдите значение выражения:

а) $\log_4 8$; б) $\log_{0,05}8000$; в) $\log_{16}\log_4 16$.

8. Найдите значение выражения:

а) $\log_{\frac{1}{8}}\sqrt{8}$; б) $\log_{\sqrt[9]{8}}8$.

9. Найдите значение выражения:

а) $9\cdot 9^{\log_9 6}$; б) $8^{2\log_8 3}$; в) $49^{\log_7 8}$; г) $3^{2+\log_3 7}$.

10. Найдите значение выражения:

а) $\frac{78}{5^{\log_5 6}}$; б) $\frac{\log_9 2}{\log_{81}2}$; в) $\frac{\log_3\sqrt{5}}{\log_3 5}$.

11. Найдите значение выражения:

а) $\log_3 6,75+\log_3 4$; б) $\log_6 234-\log_6 6,5$;

в) $\frac{\log_4 4}{\log_4 6}+\log_6 0,25$; г) $\frac{\log_2 56}{3+\log_2 7}$.

12. Найдите значение выражения:

а) $\log_5 7\cdot\log_7 25$; б) $\log_4 13\cdot\log_{13}16$.

13. Найдите значение выражения

а) $\log_a(a^2b^3)$, если $\log_b a=\frac{1}{9}$

б) $\log_a(a^{10}b^6)$, если $\log_a b=-1$;

в) $\log_a\frac{a^9}{b^4}$, если $\log_a b=9$.

Практическая работа №11 (1 час)

Тема: Вычисление и сравнение логарифмов.

Цель: Проверить и закрепить ЗУН учащихся по пониманию определения и применению свойств логарифмов.

Содержание практической работы

1. Найдите значение выражения:

а) $\log_4 8$;
б) $\log_{0,05} 8000$;
в) $\log_{16} \log_4 16$.

2. Найдите значение выражения:

а) $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt{8}$;
б) $\log_{\sqrt[9]{8}} 8$.

3. Найдите значение выражения:

а) $9 \cdot 9^{\log_9 6}$;
б) $8^{2\log_8 3}$;
в) $49^{\log_7 8}$;
г) $3^{2+\log_3 7}$.

4. Найдите значение выражения:

а) $\frac{78}{5^{\log_5 6}}$;
б) $\frac{\log_9 2}{\log_{81} 2}$;
в) $\frac{\log_3 \sqrt{5}}{\log_3 5}$.

5. Найдите значение выражения:

а) $\log_3 6,75 + \log_3 4$;
б) $\log_6 234 - \log_6 6,5$;
в) $\frac{\log_4 4}{\log_4 6} + \log_6 0,25$;
г) $\frac{\log_2 56}{3 + \log_2 7}$.

6. Найдите значение выражения:

а) $\log_5 7 \cdot \log_7 25$;

б) $\log_4 13 \cdot \log_{13} 16$.

7. Найдите значение выражения:

а) $\log_a(a^2b^3)$, если $\log_b a = \frac{1}{9}$

б) $\log_a(a^{10}b^6)$, если $\log_a b = -1$;

в) $\log_a \frac{a^9}{b^4}$, если $\log_a b = 9$.

Практическая работа №12 (1 час)

Тема: Решение задач по теме: «Переход от одного основания к другому».

Цель: Проверить и закрепить ЗУН учащихся по пониманию определения и применению свойств логарифмов.

Содержание практической работы

1) Упростите выражение:

а) $\log_2 3^5$

б) $\lg_8(a + b)^k$

в) $\log_6 2^{-4}$

2) Представьте выражение в виде логарифма степени:

а) $2\log_2 a$

б) $\frac{3}{4}\log_2 b$

в) $3\log^{\frac{1}{3}} 11$

3) Удалите множитель перед знаком логарифма, преобразовав основание логарифма:

а) $\frac{1}{2}\log_a 3$

б) $\frac{1}{n}\lg 5$

в) $\frac{1}{3}\log_{m-n} 5$

4) Перейдите к логарифмам:

а) с основанием 3 $\log_2 5$
б) с основанием 10 $\log_3 7$
в) с основанием π $\lg 2$

5) Представьте выражение в виде логарифма:

а) $\frac{\log_2 3}{\log_2 5}$
б) $\frac{\lg 7}{\lg 2}$
в) $\frac{\log_3 a}{\log_3 b}$

6) Поменяйте местами основание и подлогарифмическое выражение так, чтобы значение выражения не изменилось:

а) $\log_3 2$
б) $\lg 11$
в) $\log_{a+b} 3$

7) Замените выражение логарифмом:

а) $\frac{1}{\log_2 3}$
б) $\frac{1}{\ln 11}$
в) $\frac{1}{\log_{m-n} 3}$

8) Вычислите:

а) $5^{3+\log_5 2}$
б) $25^{\log_5 3}$
в) $2^{2+\log_2 5}$
г) $2{,}5^{\log_{2,5} 10+1}$
д) $5\cdot 3^{\log_3 2}$
е) $5^{\log_5 10-2}$
ж) $\log_4 13\cdot\log_{13} 16$
з) $\log_3 11\cdot\log_{11} 27$
и) $25^{-\log_5 10}$
к) $\log_3 8{,}1+\log_3 10$
л) $\log_{11} 24{,}2+\log_{11} 5$

м) $\log_8 160 - \log_8 2{,}5$

н) $8^{2\log_8 5} - 1$

о) $\log_{20} 300 - \log_{20} 0{,}75$

9) Вычислите:

а) $2\log_5 25 + 3\log_2 64$

б) $\log_2 \log_2 16$

в) $2\log_2 \frac{1}{4} - 3\log_{\frac{1}{3}} 27$

г) $\log_3 \log_3 \log_3 27$

10) Вычислите:

а) $\log_{\sqrt{3}} 9$

б) $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{4}$

в) $\frac{\lg 15 - \lg 3}{\lg 25}$

г) $\log_{128} 16$

д) $\frac{\lg 5}{\lg 25}$

е) $\frac{\log_3 8}{\log_3 4}$

Практическая работа №13 (1 час)

Тема: Логарифмирование и потенцирование выражений.

Цель: Овладение навыками логарифмирования и потенцирования выражений.

Содержание практической работы

1) Для того чтобы выполнить практическую работу, необходимо выбрать соответствующие задания по вашему варианту.
2) Опираясь на теоретический материал, тренировочные упражнения на уроке и домашнее задание, произвести расчет следующих заданий:

Вариант 1

1. Найдите x: а) $\lg x = \frac{1}{2}\lg 7 + \lg 5 - 2\lg 3$

б) $\log_3 x = \log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 8$;

в) $\lg x = 2\lg a - \frac{2}{3}\lg b + \lg c.$

г) $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$

2. Прологарифмируйте по основанию 10 выражение: $x = \sqrt{\frac{a \cdot \sqrt[4]{b^3}}{b\sqrt{a}}\sqrt{(ab)^{-3}}}$.

3. Вычислите: 1) $36^{-1\cdot 6^{1-\log_{\frac{1}{6}} 36}}$ 2) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$

Вариант 2

1. Найдите x: а) $\log_4 x = 2\log_4 3 + \frac{1}{2}\log_4 49 - \frac{1}{3}\log_4 27$;

б) $\lg x = \lg a + 2\lg b - \frac{1}{2}\lg c.$

в) $\lg x = 4\lg a - \frac{1}{3}2\lg b - \frac{2}{3}\lg c.$

г) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}} b$

2. Прологарифмируйте по основанию 10 выражение: $x = \frac{\sqrt[4]{cb^3\sqrt{a^3}}}{8a}$.

3. Вычислите: 1) $2^{1+3\log_2 5}$ 2) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 8^{\log_2 3}$.

Вариант 3

1. Найдите x: а) $\log_2 x = 2\log_2 3 + \frac{1}{2}\log_2 9$;

б) $\lg x = \frac{4}{3}\lg a + 2\lg b - 3\lg c.$

в) $\lg x = \frac{3}{2}\lg a + \frac{1}{2}\lg b - 3\lg c.$

г) $\log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4}\log_{\frac{2}{3}} a + \frac{4}{7}\log_{\frac{2}{3}} b$

2. Прологарифмируйте по основанию 10 выражение: $x = \frac{\sqrt{10a\cdot\sqrt[3]{0,01}}}{\sqrt[5]{100a^{-2}}}$

3. Вычислите: 1) $16^{0,5\log_4 10+1}$ 2) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$.

Вариант 4

1. Найдите x: а) $\lg x = \frac{1}{3}\lg 8 - \frac{1}{2}\lg 25 + 2\lg 5$

б) $\log_3 x = 2\log_3 7 + \frac{1}{5}\log_3 32 - \frac{1}{2}\log_3 196$;

в) $\lg x = 5\lg a + 2\lg b - \frac{1}{3}\lg c.$

г) $\log_5 x = 2\log_5 a - 3\log_5 b$

2. Прологарифмируйте по основанию 10 выражение: $x = \frac{\sqrt[3]{0{,}1a\sqrt{1000}}}{\sqrt[4]{10a^{-3}}}$.

3. Вычислите: 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+2\log_{\frac{1}{7}}3}$ 2) $11^{\log_{11\sqrt{11}}125-\log_{121}9}$.

Контрольные вопросы:

1. Каково основное логарифмическое тождество?
2. Существует ли логарифм нуля?
3. Логарифм по какому основанию называют натуральным, десятичным? Как обозначают эти логарифмы?

Форма отчетности – практическая работа, оформленная в тетради.

Практическая работа №14 (1 час)

Тема: Решение логарифмических уравнений.

Цель:Закрепить решение простейших логарифмических уравнений вида $\log_a x$ =в (где a >0, $a \neq 1$).

Теоретические сведения к практической работе

Логарифмическая функция возрастает (или убывает) на промежутке (0; +∞) и принимает на этом промежутке все действительные значения. По теореме о корне для любого ***в*** данное уравнение имеет единственное решение. Из определения логарифма следует, что $a^в$ является таким решением.

Пример: Решите уравнение $\log_2(4x+3)=3$

Решение: $\log_2(4x+3)=3$

$4x + 3 = 2^3$

$4x = 8-3$

$4x = 5$

$x = 1\frac{1}{4}$ Ответ: $1\frac{1}{4}$.

Пример: Решите уравнение $\log_2 x - \log_2 x - 2 = 0$

Решение: Введем новую переменную t, t= $\log_2 x$, тогда уравнение примет вид $t^2 - t - 2 = 0$

$D = (-1)^2 - 4\cdot 1\,(-2) = 9$

$t_1 = \frac{1+3}{2} = 2$; $t_2 = \frac{1-3}{2} = -1$

Если t = 1 тогда: $\log_2 x = -1$, $x = 2^{-1}$, $x = \frac{1}{2}$

Если t =2, тогда: $\log_2 x$ = 2, x = 2^2, x =4 Ответ: $\frac{1}{2}$; 4

Пример: Решите уравнения. $\log_2(x^2$ -3x + 1) = $\log_2(2x-3)$

x^2- 3x +1 = 2x -3,

2x – 3 >0;

Решим уравнение x^2 -3x + 1 = 2x – 3

x^2 – 3x + 1 – 2x + 3 = 0

x^2 - 5x +4 = 0

D= 25 -16 = 9

$x_1 = \frac{5+3}{2}$ = 4, $x_2 = \frac{5-3}{2}$ = 1

x = 4 или x = 1

x > $\frac{3}{2}$

x = 4 Ответ : 4.

Пример: Решите уравнение Lg(x^2 +75) – Lg (x -4) =2

Решение: Lg(x^2 +75) –Lg(x-4) = 2

Найдем ОДЗ : x^2 +75 > 0

x-4 > 0

x –любое число

x > 4 ОДЗ: (4; +∞)

Lg(x^2 +75)=2 + Lg (x-4)

Lg (x^2 +75) = Lg 100 +Lg (x-4)

Lg (x^2 +75) = Lg (100x – 400)

x^2 +75 = 100x – 400

x^2 -100x +75 +400 =0

x^2 -100x +475 = 0

$D = 100^2 – 4\ 1\ 475 = 100\ 000 – 1900 = 8100$

$x_1 = \frac{100+90}{2} = 95$

$x_2 = \frac{100-90}{2} = 5$ 95 и 5 входят в ОДЗ

Ответ: 95; 5.

Содержание практической работы

I вариант	II вариант
$\log_3 x = 2$	$\log_2 x = 3$
$\log_5 x = -2$	$\log_4 x = -2$
$\log_2(x-4) = 3$	$\log_5(13-x) = 2$
$\log_8(x^2 - 1) = 1$	$\log_2(x^2 - 1) = 3$
$\lg(2 - 5x) = 1$	$\lg(7-x) = -1$
$\log_3 x - 3\log_3 x + 2 = 0$	$\log_2 x -.\log_2 x = 2$
$\log_3 x - 3\log_3 x + 2 = 0$	$\log_{\frac{1}{3}}^{2} x - \log_3 x = 6$

Практическая работа №15 (1 час)

Тема: Выполнение приближенных вычислений и решение прикладных задач.

Цель: Формировать у студентов знания, умения и навыки работы с приближенными числами в применении формул погрешностей элементарных действий и функций, нахождения значений выражений по способу границ и методом строгого учета абсолютных погрешностей после каждой операции.

Содержание практической работы

Задание №1.

Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры:
а) в строгом смысле; б) в широком смысле.

№	а)	б)		№	а)	б)

варианта				варианта		
1	11,445	2,043		16	112,5	0,04453
2	8,345	0,288		17	0,576	2,5008
3	0,374	4,348		18	25,613	0,0748
4	41,72	0,678		19	0,4223	0,57
5	18,357	2,16		20	112,45	3,4
6	14,862	8,73		21	2,4516	0,863
7	0,3648	21,7		22	5,6432	0,00858
8	0,5746	236,58		23	12,688	4,636
9	5,634	0,0748		24	15,644	6,125
10	20,43	0,576		25	16,383	5,734
11	12,45	3,4453		26	18,275	0,00644
12	2,3445	0,745		27	3,75	6,8343
13	0,5746	42,884		28	26,3	4,8556
14	3,4	0,078		29	43,813	0,645
15	2,4342	0,57004		30	3,643	72,385

Задание №2.

Число x, все цифры которого верны в строгом смысле, округлить до трех значащих цифр. Для полученного результата $x_1 \approx x$ вычислить границы абсолютной и относительной погрешностей. В записи числа x_1 указать количество верных цифр по погрешности.

№ варианта	x		№ варианта	x
1	3549		16	9,2038
2	32,147		17	2,3143
3	0,0002568		18	0,012147
4	7,544		19	0,86129
5	198,745		20	0,1385
6	37, 4781		21	23,394
7	0,183814		22	0,003775
8	0,009145		23	718,21
9	11,3721		24	9,73491
10	0,2538		25	11,456
11	10,2118		26	0,1495
12	4,394		27	6,2358
13	0,8437		28	4,4005
14	129,66		29	2,3078
15	48,847		30	3,2175

Вопросы по теме:

1. Что такое абсолютная и относительная погрешности?
2. Как классифицируют виды погрешностей?
3. Что значит цифра, верная в строгом, широком смыслах?
4. Как находится погрешность округленного числа?

5. Как определить количество верных цифр по абсолютной погрешности.

Практическая работа №16 (1 час)

Тема: Решение задач по теме: «Признаки взаимного расположения прямых».

Цель: Отработать навыки распознавать на чертежах различные случаи взаимного расположения прямых, используя формулировку определений , признаков и свойств расположение прямых и применение признаков и свойств при решении задач.

Содержание практической работы

I. Ответить на вопрос и выполнить рисунок.

1.Прямые m и n лежат в одной плоскости. Могут ли эти прямые пересекаться, быть параллельными, могут ли они скрещиваться?

2. Прямые b и c пересекаются. Как расположена прямая b относительно прямой d, если c‖d?

3. Даны скрещивающиеся прямые c и d. Как может быть расположена прямая c относительно m, если m ‖ d?

4. Прямые b и d пересекаются. Как расположена прямая b относительно c, если c и d пересекаются?

5. Даны скрещивающиеся прямые m и n. Как может быть расположена прямая m относительно прямой c, если c и n пересекаются?

II. Выполнить рисунок и заполнить таблицу.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина B_1C_1, F – середина D_1C_1, K – середина DC, O – точка пересечения диагоналей квадрата ABCD.

	Прямые	Взаимное расположение прямых
1	AA_1 и CC_1	
2	A_1C_1 и B_1D_1	
3	A_1C_1 и C_1D_1	
4	A_1M и CC_1	
5	A_1D и DC_1	

6	A_1C_1 и BD	
7	A_1C и AC	
8	A_1B и D_1C	
9	A_1C и BB_1	
10	A_1D и AB	
11	A_1M и BC	
12	A_1M и BK	
13	C_1K и B_1F	
14	C_1O и AB_1	
15	A_1O и B_1D	

Контрольные вопросы

1.Что изучает стереометрия?
2. Какие существуют основные фигуры в пространстве?
3. Какие аксиомы существуют в стереометрии?
4. Какие следствия из аксиом существуют в стереометрии?
5. Какие прямые в пространстве называются параллельными?
6. Какие прямые называются скрещивающимися?
7. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?

Практическая работа №17 (1 час)

Тема: Решение задач по теме: «Угол между прямыми».

Цель: Обобщить и систематизировать знания по теме «Параллельность в пространстве»; закрепить умения использовать полученные знания для решения задач.

Теоретические сведения к практической работе

Теорема: Две прямые называются скрещивающимися,если одна из них лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскостьв точкене принадлежащей 1 прямой.

Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Теорема: Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Теорема: Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Содержание практической работы

Вариант 1.

1) Треугольники АВС и АДС лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону АС. Точка

Р – середина стороны АД, точка К – середина ДС.

а) Каково взаимное расположение прямых РК и АВ?

б) Чему равен угол между прямыми РК и АВ, если угол АВС равен 40º, а угол ВСА = 80º. Ответ обобщите.

2) Прямые а и в лежат в параллельных плоскостях. Могут ли эти прямые быть

а) параллельными б) скрещивающимися? Сделать рисунок для каждого возможного случая.

3) Точка В не лежит в плоскости Δ АДС. Точки М, N и Р – середины отрезков ВА, ВС, ВД соответственно. а) Доказать, что плоскости (MNP) и (АДС) параллельны; б) Найдите площадь треугольника MNP, если SΔАДС = 48 см2 .

Вариант 2.

1) Основание трапеции АВСД лежит в плоскости α. Через точки В и С проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках Е и F соответственно.

1) Каково взаимное расположение EF и AB?

2) Чему равен угол между прямыми EF и AB, если угол ABC = 150º. Ответ обоснуйте.

2) Прямые а и в лежат в пересекающихся плоскостях α и β. Могут ли эти прямые быть

а) параллельными б) скрещивающимися? Сделать рисунок для каждого случая.

3) В тетраэдре ДАВС точки М, N и Р – середины рёбер ДА, ДВ, ДС соответственно.

а) Доказать, что плоскости (MNP) и (ABC) параллельны.

б) Найти площадь Δ ABC, если SΔMNP = 14 см2 .

Требования к отчету: отчет должен содержать решение заданий с указаниями на теоретические факты, использованные при решении.

Практическая работа №18 (1 час)

Тема: Решение задач по теме: «Взаимное расположение прямых и плоскостей».

Цель: Научиться применять свойства и признаки параллельности прямых для решения практических задач.

Содержание практической работы

1. Точки А, В и С не лежат на одной прямой М ∈ АВ, К ∈ АС, Х∈МК. Докажите, что точка Х лежит в плоскости АВС.
2. Плоскости α и β пересекаются по прямой т. Прямая а лежит в плоскости α и пересекает плоскость β. Пересекаются ли прямые а и m? Почему?
3. На рисунке 1 плоскости α и β пересекаются по прямой EP. Прямая AB лежит в плоскости α. В плоскости P через точку C проведите прямую так, чтобы она:

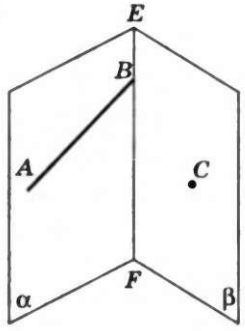


Рис. 1

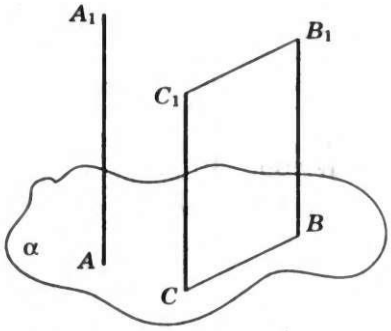


Рис. 2

1) пересекала прямую AB;

2) была скрещивающейся с прямой AB;

3) была параллельна прямой AB.

4. На рисунке 2 $AA_1 || CC_1$, $AA_1 || BB_1$, $BB_1 = CC_1$. Докажите, что $B_1C_1 = BC$.

5. В параллелограмме ABCD точки E и F принадлежат сторонам AB и CD, причем BE:EA = CF:FD. Через эти точки проведена плоскость. Докажите, что BC || a.

6. Прямая a параллельна плоскости α. Через прямую a проведена плоскость β, пересекающая плоскость α по прямой b. В плоскости a существует прямая c, которая параллельна a. Докажите, что b||c.

7. ABCBA1B1C1B1 — параллелепипед, BE лежит в плоскости A1BD. Докажите, что BE параллельна плоскости B1D1C.

8. В тетраэдре DABC ∠DBC = ∠DBA = ∠ABC = 90°, BD=BA=BC=2 см. Найдите площадь грани ADC.

9. Постройте сечение тетраэдра DABC плоскостью, проходящей через точки P, M и K, где P ∈ AD M ∈ BD и K ∈BC, причем AP = PD и DM = MB.

Практическая работа №19 (1 час)

Тема: Решение задач по теме: «Признак и свойства параллельных плоскостей».

Цель: Научиться применять свойства и признаки параллельности плоскостей для решения практических задач.

Содержание практической работы

Вариант I

1. Параллелограммы *ABCD* и *ADFE* лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону *AD*. Прямая *m*, параллельная *BC*, пересекает плоскости *ABE* и *DCF* соответственно в точках *H* и *P*. Докажите, что *HPFE* – параллелограмм.

2.Плоскости α и β параллельны, $a \parallel a_1$. Прямая *a* пересекает плоскости α и β соответственно в точках *A* и *B*, а прямая a_1 пересекает плоскость α в точке A_1. Постройте точку пересечения a_1 с плоскостью β. Поясните.

3. В тетраэдре $DABC$ угол DBA = угол DBC = 90°, DB = 6, $AB = BC$ = 8, AC = 12. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через середину DB и параллельной плоскости ADC. Найдите площадь сечения.

4*. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки E и F и параллельной прямой a.

Вариант II

1. Вне плоскости α расположен треугольник ABC, у которого медианы AA_1 и BB_1 параллельны плоскости α. Через вершины B и C треугольника проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α соответственно в точках E и F. Докажите, что $ECBF$ – параллелограмм.

2.Плоскости α и β параллельны. Прямая a пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B, а прямая b – в точках C и D. Найдите взаимное положение прямых a и b. Поясните.

3. Все грани параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – квадраты со стороной a. Через середину AD параллельно плоскости DA_1B_1 проведена плоскость. Найдите периметр сечения.

4*. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки C и K и параллельной прямой a.

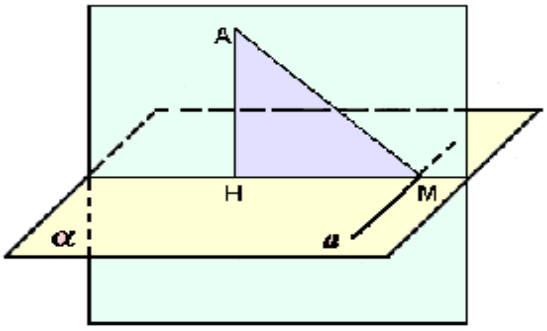
Практическая работа №20 (1 час)

Тема: Решение задач по теме: «Перпендикуляр и наклонная к плоскости».

Цель: Обобщить и систематизировать знания по теме «Перпендикуляр, наклонная, проекция»; закрепить умения использовать полученные знания для решения задач.

Теоретические сведения к практической работе

При решении задач на нахождение угла между прямой и плоскостью необходимо помнить, что углом между прямой и плоскостью является наименьший угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.



АН - перпендикуляр
АМ - наклонная
НМ – проекция наклонной на данную плоскость
a - прямая, проходящая через основание наклонной

Содержание практической работы

1. Наклонная АМ, проведенная из точки А к данной плоскости, равна d. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой АМ и данной плоскостью равен 45^0?

2. Из точки А, удаленной от плоскости γ на расстояние d, проведены к этой плоскости наклонные АВ и АС под углом 30^0 к плоскости. Их проекции на плоскость γ образуют угол в 120^0. Найдите ВС.

Требования к отчету: Отчет должен содержать решение заданий с указаниями на теоретические факты, использованные при решении.

Практическая работа №21 (2 часа)

Тема: Нахождение расстояний от точки до плоскости, от прямой до плоскости, между плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между произвольными фигурами в пространстве».

Цель: Научиться находить расстояние от точки до плоскости, от прямой до плоскости, между плоскостями при решении задач.

Содержание практической работы

Вариант 1

1. Отрезок *AD* перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника *ABC.* Известно, что *AB* = *AC* = 5 см, *BC* = 6 см, *AD* = 12 см. Найдите расстояния от концов отрезка *AD* до прямой *BC.*

2. Прямая *AK* перпендикулярна к плоскости правильного треугольника *ABC,* а точка *M* — середина стороны *BC.* Докажите, что $MK \perp BC$.

3. Концы отрезка *AB* лежат на двух параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно *d,* причем *d* < *AB.* Докажите, что проекции отрезка *AB* на эти плоскости равны. Найдите эти проекции, если АВ = 13 см, d = 5 см.

4. Через вершину *A* прямоугольника *ABCD* проведена прямая *AK,* перпендикулярная к плоскости прямоугольника. Известно, что *KD* - 6 см, *KB* = 7 см, *KC* - 9 см. Найдите: а) расстояние от точки *K* до плоскости прямоугольника *ABCD,* б) расстояние между прямыми *AK* и *CD.*

Вариант 2

1. Отрезок AD перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника ABC. Известно, что AB = AC = 5 см, BC = 8 см, AD = 12 см. Найдите расстояния от концов отрезка AD до прямой BC.

2. Прямая AN перпендикулярна к плоскости правильного треугольника ABC, а точка K — середина стороны *BC.* Докажите, что $KN \perp BC$.

3. Концы отрезка *AB* лежат на двух параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно *d,* причем $d < AB$. Докажите, что проекции отрезка *AB* на эти плоскости равны. Найдите эти проекции, если *AB* = 5 см, *d* = 3 см.

4. Через вершину *A* прямоугольника *ABCD* проведена прямая *AK,* перпендикулярная к плоскости прямоугольника. Известно, что *KD* - 8 см, *KB* = 7 см, *KC* - 9 см. Найдите: а) расстояние от точки *K* до плоскости прямоугольника *ABCD,* б) расстояние между прямыми *AK* и *CD.*

Практическая работа №22 (1 час)

Тема: Решение задач по теме: «Теорема о трех перпендикулярах».

Цель: Сформировать умение применять теорему о трех перпендикулярах при решении простейших стереометрических задач.

Теоретические сведения к практической работе

Теорема о трёх перпендикулярах:

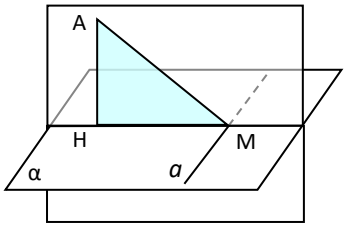


Рис. 1

AH – перпендикуляр (расстояние от точки A до плоскости α)

AM – наклонная.

HM – проекция наклонной AM.

$\angle A$ - угол между наклонной AM и перпендикуляром HM.

– $\angle M$ - угол между наклонной AM и ее проекцией на плоскость (угол между наклонной и плоскостью).

Теорема о трех перпендикулярах. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной (рис. 1).

Символьная запись к теореме о трех перпендикулярах $a \perp HM \Rightarrow a \perp AM$

Справедлива также **обратная теорема:**

Теорема (обратная теорема о трех перпендикулярах). Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции (рис. 1).

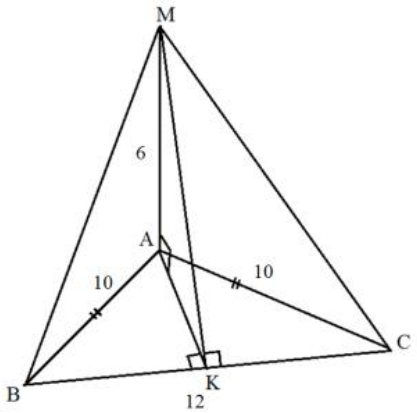
Символьная запись к обратной теореме о трех перпендикулярах $a \perp AM \Rightarrow a \perp HM$

Решения типовых задач

Каждое действие решения геометрической задачи выполняется в несколько этапов:

1) рассматривается простейшая геометрическая фигура (определяется ее тип и объясняется ее описание);
2) выбирается способ (формула) вычисления неизвестной величины;
3) производятся вычисления (подстановки);
4) записывается ответ.

В случае если неизвестное не удалось найти за эти 4 этапа, действия нумеруются и выполняются до конечного ответа.



Задача 1. Отрезок АМ перпендикулярен плоскости треугольника АВС и имеет длину 6 см. Найдите расстояние от точки М до прямой ВС, если АВ = АС = 10 см, С=12 см.

Дано: Δ АВС - равнобедренный, т.к. АВ = АС = 10 см

АМ – перпендикуляр, $AM \perp (ABC)$, АМ = 6 см

ВС = 12см.

Найти: МК.

Решение.

1) Рассмотрим Δ МАК - прямоугольный, т.к. АМ – перпендикуляр, $AM \perp (ABC)$.

МК – можно назвать наклонной к плоскости Δ МАК, а АК ее проекцией на эту плоскость.

По теореме Пифагора: $MK^2 = AM^2 + AK^2$, АМ= 6, **<u>АК = ?</u>**

2) Рассмотрим Δ АВС - равнобедренный, т.к. по условию АВ = АС = 10 см.

Определим чем является АК для Δ АВС. Так как по условию задачи МК – расстояние от точки М до прямой ВС (т.е. проводится перпендикулярно к этой прямой), то по обратной теореме о трех перпендикулярах:
если $MK \perp BC$, то $AK \perp BC \Rightarrow$ АК - высота в Δ АВС.

Так как ΔАВС – равнобедренный, то АК не только высота, но и медиана $\Rightarrow BK = KC = \frac{12}{2} = 6.$

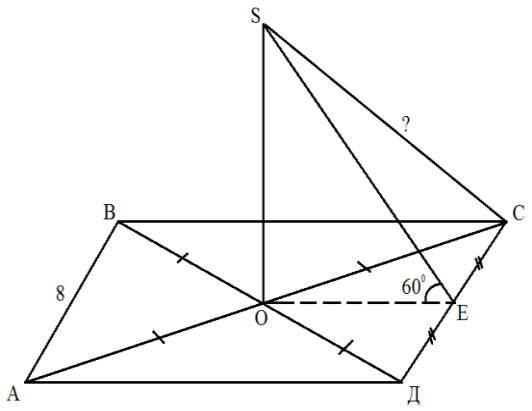
3) Рассмотрим Δ АКВ – прямоугольный (т.к. АК – высота)

АВ = 10 см (по условию), ВК = 6 (из 2 п. решения).
По теореме Пифагора: $AK^2 = AB^2 - BK^2$

$$AK^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

Т.к. $AK > 0$, то $AK = \sqrt{64} = 8$ см.
Вернемся в 1 п. решения: $MK^2 = AM^2 + AK^2$
$MK^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$
Т.к. $MK > 0$, то $MK = \sqrt{100} = 10$ см.

Ответ: 10 см



Задача 2. Из точки О пересечения диагоналей[1] квадрата АВСД к его плоскости проведен перпендикуляр SO и точка S соединена с серединой стороны ДС (рис. 2). Найдите длину отрезка SC, если АВ= 8 см, $\angle SEO = 60^0$.

Дано: АВСД – квадрат,
АС и ВД – диагонали квадрата,
О – точка пересечения диагоналей.
SO – перпендикуляр, $SO \perp (ABC)$.
Е – середина ДС (т.е. ДЕ = ЕС)
АВ= 8 см, $\angle SEO = 60^0$.
Найти: SC.
Решение.

1) Рассмотрим ΔАДС - прямоугольный, равнобедренный (т.к. по условию АВСД – квадрат, значит, АД=ДС=8, $\angle АДС = 90^0$). Так как АО = ОС (по свойству диагоналей квадрата) и ДЕ = ЕС (по условию задачи), то ОЕ –

[1] В квадрате точка пересечения диагоналей делит их пополам.

средняя линия Δ АДС $\Rightarrow OE = \frac{АД}{2} = \frac{8}{2} = 4$ (по свойству средней линии треугольника[2]).

2) Рассмотрим ΔSOE - прямоугольный (т.к. по условию SO – перпендикуляр, $SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp OE$). Так как по условию задачи $\angle SEO = 60^0$, то $\angle OSE = 180^0 - (90^0 - 60^0) = 30^0$. Так как катет, лежащий против этого угла равен половине гипотенузы, а гипотенуза в два раза больше этого катета, то получаем, что $SE = 2 \cdot OE = 2 \cdot 4 = 8$см.

3) Рассмотрим ΔSEC и определим его тип:

Так как в равнобедренном ΔСОД (ОД = ОС по условию задачи) ОЕ является медианой (Е- середина стороны ДС по условию задачи), то ОЕ – высота[3], следовательно, $OE \perp СД$.

Так как для ΔSOE отрезок ОЕ – является проекцией наклонной SE на плоскость квадрата, то по теореме о трех перпендикулярах следует, что $СД \perp SE$, а, следовательно, ΔSEC – прямоугольный, в котором известно, что $EC = 4$см (по условию задачи $ДЕ = EC = \frac{СД}{2} = \frac{8}{2} = 4$), SE = 8 см (из 2 пункта решения).

По теореме Пифагора $SC^2 = SE^2 + EC^2$

$SC^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80,\ т.к.\ SC > 0,\ то\ SC = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$ см.

Ответ: $4\sqrt{5}$ см.

Контрольные вопросы

1. AB – перпендикуляр к плоскости, AC – наклонная, BC – её проекция на плоскость, CD – прямая на плоскости, перпендикулярная прямой BC. Определите величину угла ACD.
2. AB – перпендикуляр к плоскости, AC – наклонная, BC – её проекция на плоскость, CD – прямая на плоскости, перпендикулярная прямой AC. Определите величину угла BCD.

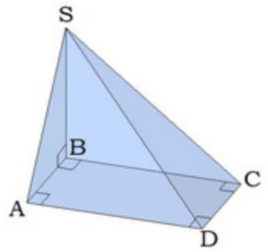


Рис. 2

3. Угол C треугольника ABC – прямой. AD – перпендикуляр к плоскости треугольника ABC. Определите тип Δ BCD.

4. Из вершины S к плоскости квадрата АВСД проведен перпендикуляр BS и наклонные SA, SC и SD

[2] Средняя линия треугольника равна половине его основания.
[3] В равнобедренном треугольнике медиана является и высотой, и биссектрисой.

(рис. 2). Назовите все прямоугольные треугольники с вершиной S. Ответ обоснуйте.

5. Из вершины А прямоугольного треугольника АВС (угол В – прямой) к плоскости треугольника проведен перпендикуляр АК. Определите взаимное расположение прямых КВ и ВС.

Содержание практической работы

Уровень А. Из точки М проведен перпендикуляр к плоскости прямоугольника АВСД (рис. 3). Найдите расстояние от М до сторон прямоугольника АВСД, если известно, что МВ = 6см, ВС = 8см, АВ = 4 см.

Уровень В. Найдите расстояние от точки М до стороны СВ прямоугольного треугольника АВС, если АМ = ВС= 5 см, АС = 13 см (рис. 4).

Уровень С. Из точки М проведен перпендикуляр к плоскости равнобедренного треугольника АВС. Найдите расстояние от М до стороны ВС, если АМ = 4 см, АВ =АС =5 см, ВС = 8 см (рис. 5).

Дополнительное задание

Задача. Из М проведен перпендикуляр к плоскости прямоугольника АВСД. Найдите расстояние от точки М до сторон прямоугольника АВСД, если АВ = 8 см, ВС = 6 см, ОМ = 6 см (рис. 6).

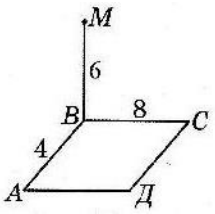


Рис. 3

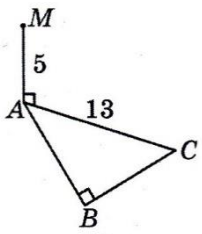


Рис. 4

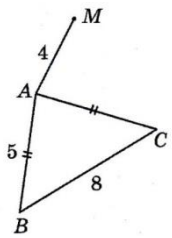


Рис. 5

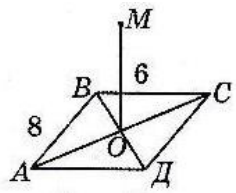


Рис. 6

Практическая работа №23 (1 час)

Тема: Решение задач по теме: «Угол между прямой и плоскостью».

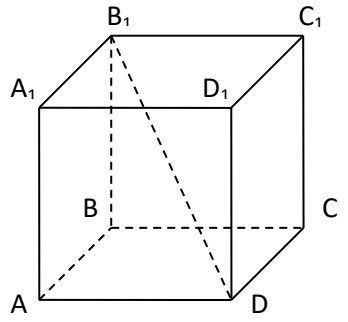
Цель: Научиться находить угол между прямой и плоскостью при работе с многогранниками, обосновывать или опровергать выдвигаемые предположения.

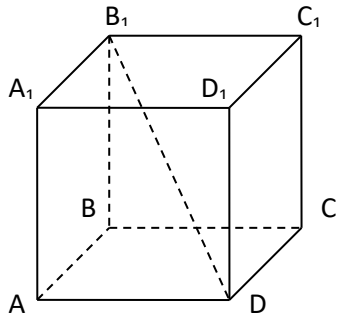
Содержание практической работы

Алгоритм:

1. *Найдите точку пересечения прямой и плоскости?*
2. *Найдите точку прямой не лежащую в плоскости?*
3. *Найдите проекцию данной точки на плоскость?*
4. *Соедините эти точки. Полученная прямая - проекция прямой на плоскость.*
5. *Выделите цветом полученный угол.*

1. Найдите угол между B_1D и (ABC); между B_1D и (DD_1C_1)





ABCD- прямоугольник,

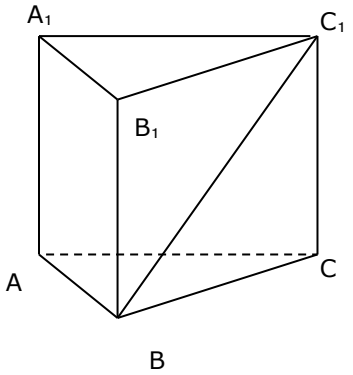
$AA_1 \perp (ABC)$

ABCD-параллелограмм,

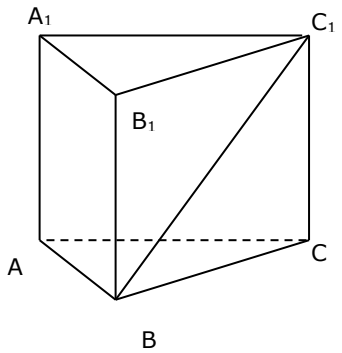
$AA_1 \perp (ABC)$

2. $BB_1 \perp (ABC)$. Найдите угол между BC_1 и (AA_1B_1).

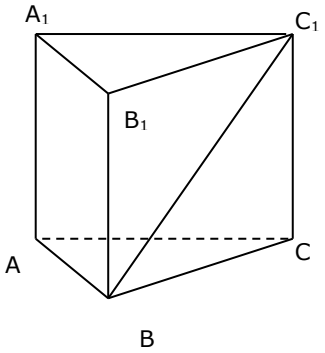
а)△ABC – равносторонний



б)△ABC – прямоугольный ∠B=90°



в)△ABC – тупоугольный, ∠B>90°



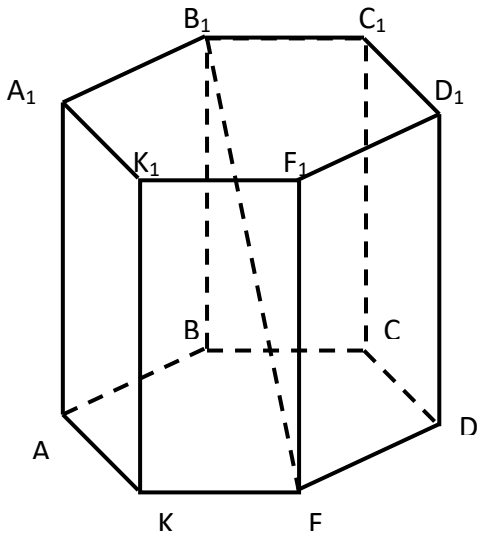
3. $AA_1 \perp (ABC)$

Найдите угол:

Между B_1F и (ABC);

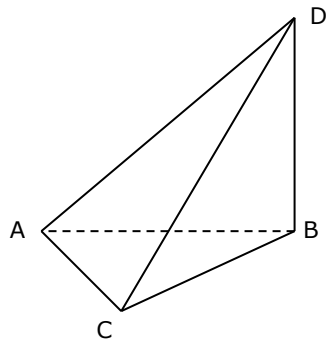
Между B_1F и (KK_1F);

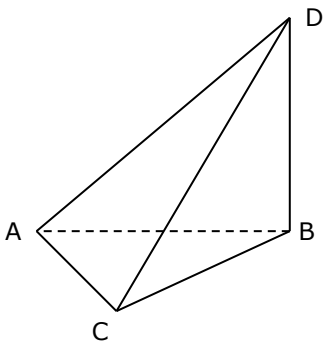
Между B_1F и (AA_1B_1);



4. $BD \perp (ABC)$

Найдите угол между CD и плоскостью (ABD)

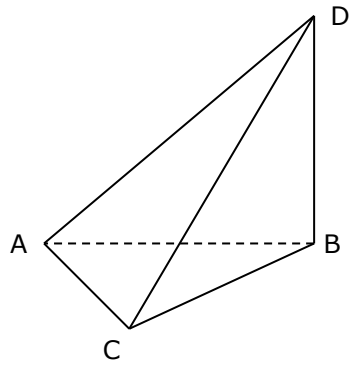




$\triangle ABC$ – прямоугольный

$\angle C=90°$

$\triangle ABC$ – равносторонний



$\triangle ABC$ – прямоугольный $\angle A=90°$

Практическая работа №24 (1 час)

Тема: Решение задач по теме: «Признаки и свойства перпендикулярных плоскостей».

Цель: Обобщить и систематизировать знания по теме «Перпендикулярность 2 плоскостей, двугранный угол; закрепить умения использовать полученные знания для решения задач.

Теоретические сведения к практической работе

Определение
Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90º.
Признак перпендикулярности прямой и плоскости
Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.
В задачах часто используется *теорема о 3-х перпендикулярах*:
Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.
Обратная теорема
Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к её проекции.

Содержание практической работы

Вариант 1

1. Дан тетраэдр МАВС, в котором МВ ВА. Доказать, что ΔМВД – прямоугольный, если Д – произвольная точка отрезка АС. Найти МД и площадь ΔМВД, если
МВ = ВД = а.
2.Из точки М проведён перпендикуляр МД = 6 см к плоскости квадрата. Наклонная МО образует с плоскостью квадрата угол 60º. О – точка пересечения диагоналей. Доказать, что ΔМОД – прямоугольный. Найти площадь квадрата.

Вариант 2

1. Четырёхугольник АВСД – квадрат, О – его центр. Прямая ОМ перпендикулярна плоскости квадрата. Доказать, что МА = МВ = МС = МД. Найдите МА, если АВ = 4 см, ОМ = 1 см.

2. Из точки М проведён перпендикуляр к плоскости ΔАВС. ВМ = 9 см, АС = 10 см,
ВС = ВА = 13 см. Найдите расстояние от точки М до прямой АС.

Требования к отчету: отчет должен содержать решение заданий с указаниями на теоретические факты, использованные при решении.

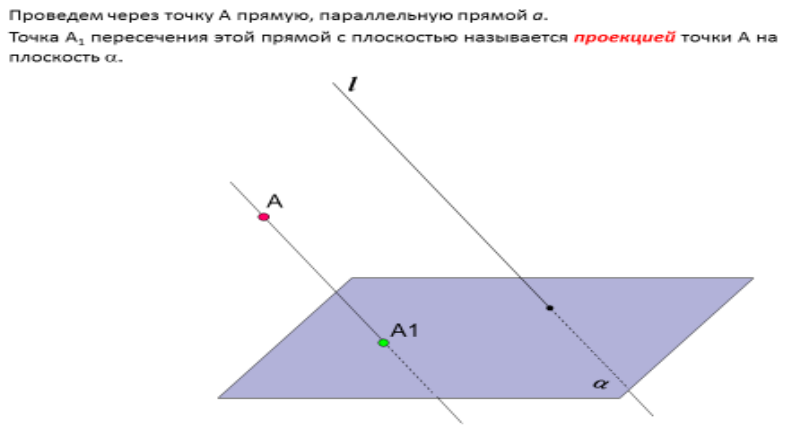
Практическая работа №25 (1 час)

Тема: Решение задач по теме: «Параллельное проектирование и его свойства».

Цель: Закрепить знания и умения студентов по теме «Параллельное проектирование и его свойства. Взаимное расположение пространственных фигур»; на практике научиться строить пространственные изображения фигур.

Теоретические сведения к практической работе

В стереометрии изучаются пространственные фигуры, однако на чертеже они изображаются в виде плоских фигур. Каким же образом следует изображать пространственную фигуру на плоскости? Для этого используется параллельное проектирование пространственной фигуры на плоскость. Параллельная проекция всем хорошо знакома из жизни- тень фигуры. Солнце находится от нас так далеко, что его лучи в любой момент времени можно считать практически параллельными. Поэтому тень от любого предмета на дороге или стене дома представляет собой проекцию этого предмета на плоскость дороги или стены параллельно лучам солнца.



Пусть задана некоторая плоскость α, и некоторая прямая *a*, пересекающая плоскость α. Проекцией точки А на плоскость α называется точка A_1 - точка пересечения с плоскостью α прямой, параллельной прямой *a*, проходящей через точку А. Плоскость α называется плоскостью проекцией, прямая *a* – проектирующей прямой или прямой, задающей направление проектирования. Все прямые, параллельные прямой *a*, задают одно и то же направление проектирования. Проекцией некоторой фигуры называется множество проекций всех ее точек.

Свойства параллельного проектирования:

1. Проекция прямой есть прямая, проекция отрезка – отрезок.
2. Параллельность прямых (отрезков, лучей) сохраняется.
3. Отношение длин отрезков, лежащих на параллельных или на одной прямой сохраняется.
4. Линейные размеры плоских фигур (длины отрезков, величины углов) не сохраняются.

Изображение пространственных фигур

В стереометрии изображением фигуры называют любую фигуру, подобную параллельной проекции данной фигуры. Для данной фигуры форма ее изображения зависит от положения данной фигуры относительно плоскости проекций и от направления проектирования.

Содержание практической работы

Задание: С помощью тени изобразить возможные варианты параллельных проекций плоских фигур на плоскость и сделать вывод. Для этого используем разные модели

Вариант 1

Треугольник, четырехугольник, окружность.

Вариант 2 Прямоугольник, овал, равносторонний треугольник.

Контрольные вопросы:

1.Приведите примеры параллельного проектирования в природе.

2.При параллельном проектировании изображением отрезка является …..

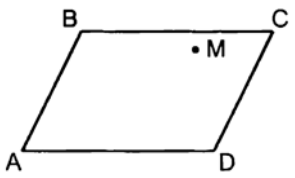
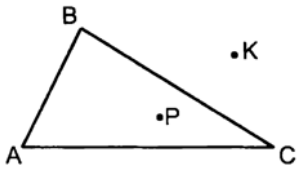
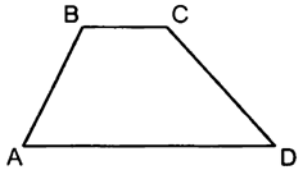
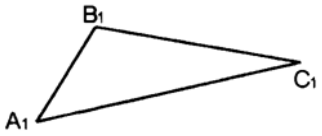
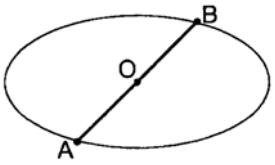
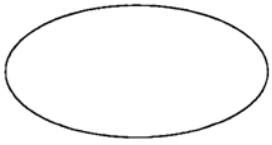
Практическая работа №26 (1 час)

Тема: Решение задач по теме: «Взаимное расположение пространственных фигур».

Цель: Отработать навыки изображения пространственных фигур.

Содержание практической работы

Вариант 1	Вариант 2
1.	1.

 Четырехугольник *ABCD* – параллельная проекция ромба. Построить проекцию перпендикуляра, проведенного из точки *M* к диагонали *BD*.	 ΔABC – параллельная проекция равностороннего треугольника. Построить проекции прямых, перпендикулярных сторонам треугольника, проходящих через точки *P* и *K*.
2.  Четырехугольник *ABCD* – параллельная проекция равнобокой трапеции. Построить проекцию высоты трапеции, проведенной из вершины *B*.	2. .  $\Delta A_1B_1C_1$ – параллельная проекция ΔABC, $AC = 2AB$. Построить проекцию биссектрисы $\angle A$.
3.  Дана параллельная проекция окружности. *AB* – проекция ее диаметра. Построить проекцию диаметра, перпендикулярного *AB*.	3.  Дана параллельная проекция окружности. Построить проекцию центра окружности.

Практическая работа №41 (1 час)

Тема: Решение задач по теме «Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой».

Цель: Сформировать умение применять действия по переводу градусной меры угла в радианную и наоборот к решению задач по изучаемой теме.

Теоретические сведения к практической работе

1. Градусная и радианная мера угла	
1^0 – это $\frac{1}{180}$ развернутого угла	1 радиан – это угол длина дуги которого равна радиусу окружности
1^0 соответствует $\frac{\pi}{180^0}$ радиан	1 радиан $\approx 57{,}29^0$
$\mathrm{A}^{\mathbf{0}} = \frac{\mathbf{180^0}}{\boldsymbol{\pi}} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{\text{рад.}}$ *Формула перевода радиан в градусы*	$\boldsymbol{\alpha}_{\text{рад.}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{180^0}} \cdot \mathrm{A}^{\mathbf{0}}$ *Формула перевода градусов в радианы*
2. Понятие угла	
в геометрии	в тригонометрии
Угол – это геометрическая фигура, образованная двумя лучами, которые выходят из одной точки. Каждому углу ставится в соответствие градусная мера	Угол – это фигура, образованная при повороте начального радиуса ОА вокруг центра единичной окружности. Положительное α направление $-\alpha$ Отрицательное направление *Направление поворота начального радиуса против часовой стрелки считается положительным,* *а по часовой стрелке – отрицательным.*

Пример 1. Найдём радианную меру угла72°

Решение: Так как $\boldsymbol{\alpha}_{\text{рад.}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{180^0}} \cdot \mathrm{A}^{\mathbf{0}} = 72 \cdot \frac{\pi}{180}\text{рад} = \frac{2\pi}{5}\ \text{рад} \approx 1{,}3\text{рад}$.

При записи радианной меры угла, обозначение «рад» часто опускают.

Ответ: $72^0 = \frac{2\pi}{5}$.

Пример 2. Выразим в градусах 4,5 рад.

Решение: Так как $\mathrm{A}^{\mathbf{0}} = \frac{\mathbf{180^0}}{\boldsymbol{\pi}} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{\text{рад.}} = 4{,}5 \cdot \frac{180^0}{\pi} = \frac{810^0}{\pi} \approx 258^0$.

Ответ: $4{,}5\text{рад} = 258^0$

Содержание практической работы

Вариант 1	**Вариант 2**	**Вариант 3**
№1. Данные углы переведите в радианную меру с точностью до 0,01		

а) 6°; б) 56°; в)175°	а) 26°; б) 2°; в) 290°	а) 624°; б) 16°; в) 9°
№2. Данные углы переведите в градусную меру с точностью до 1°		
а) $\frac{5\pi}{6}$, б) $2\frac{1}{6}\pi$ в) 5π	а) $\frac{21\pi}{4}$, б) $\frac{5\pi}{3}$ в) 9π	а) $\frac{2\pi}{3}$, б) $\frac{4}{9}\pi$ в) 8π
№3. Определите четверть, в которой лежит данный угол		
а) $-\frac{21\pi}{4}$- б) 160°; в) 1,5	а) $\frac{7\pi}{3}$ б) -259°; в) 7	а) $\frac{5\pi}{3}$, б) 148°; в) -1,2
№4. Постройте на числовой окружности точки , соответствующие данным углам (числам)		
а) 624°; б) $\frac{7\pi}{4}$ в) -2,7	а) $\frac{\pi}{12}$ б) -156°; в) 12	а) $\frac{3\pi}{8}$ б) 320°; в) -23
№5. Найдите координаты точки, полученной поворотом точки P(1,0) на данный угол		
$-\frac{3\pi}{2}+2\pi n.$	$\frac{5\pi}{2}+2\pi n.$	$\frac{9\pi}{2}+2\pi n.$

Практическая работа №42 (1 час)

Тема: Решение задач по теме «Основные тригонометрические тождества.

Цель: Формирование навыков использования основных тригонометрических тождеств при преобразовании выражений.

Содержание практической работы

1. **Упростите выражения:**

1) $\sin^2 x-1$;

2) $\cos^2 x+(1-\sin^2 x)$;

3) $\sin^2 x+2\cos^2 x-1$;

4) $(1-\sin x)\cdot(1+\sin x)$;

5) $(\cos x-1)\cdot(1+\cos x)$;

6) $1-\sin^2 x-\cos^2 x$;

7) $\cos^2 x-\left(1-2\sin^2 x\right)$;

8) $\sin x\cdot\cos x\cdot tgx$;

9) $\sin x\cdot\cos x\cdot ctgx-1$;

10) $\sin^2 x-tgx\cdot ctgx$.

2. Преобразуйте выражения:

1) $\sin x\cdot ctgx$;

2) $\cos x\cdot tgx$;

3) $\dfrac{\sin x}{tgx}$;

4) $\dfrac{tgx}{ctgx}+1$;

5) $\dfrac{\sin^2 x-1}{1-\cos^2 x}$.

3. Упростите выражение:

$ctgx-\dfrac{\cos x-1}{\sin x}$;

$\dfrac{1}{\sin x-1}+\dfrac{1}{1+\sin x}$.

Вычислите:

1) Найдите значение $tg\alpha$, если $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

2) Найдите значение $tg\alpha$, если $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

3) Найдите значение $ctg\alpha$, если $\sin\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{7}}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

Практическая работа №43 (1 час)

Тема: Решение задач по теме Формулы сложения.

Цель: Формирование навыков использования формул сложения при преобразовании выражений.

Теоретический материал

Косинус суммы двух углов равен произведению косинусов этих углов минус произведение синусов этих углов:

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$$

Косинус разности двух углов равен произведению косинусов этих углов плюс произведение синусов этих углов:

$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$$

Синус суммы двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго плюс произведение косинуса первого угла на синус второго:

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$$

Синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго угла минус произведение косинуса первого угла на синус второго угла:

$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y.$$

Используя формулы сложения для синуса и косинуса получаются формулы сложения для тангенса и котангенса:

$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy}$$

$$tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgx\cdot tgy}$$

$$ctg(x+y)=\frac{ctgx\cdot ctgy-1}{ctgx+ctgy}$$

$$ctg(x-y)=\frac{ctgx\cdot ctgy+1}{ctgx-ctgy}$$

Пример 1. Вычислите $\cos 15°$.

Решение: представим $15°$ в виде разности $45°-30°$. Тогда $\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\cdot\cos 30°+\sin 45°\cdot\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Пример 2. Упростите выражение $\cos(x+y)+\cos(x-y)$.

Решение:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y+\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y=2\cos x\cdot\cos y$$

Содержание практической работы

1. С помощью формул сложения преобразуйте выражение:

   1) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$

   2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$

   3) $\cos(\pi+\beta)$

   4) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)$

2. Упростите выражения:

   1) $\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cdot\cos\beta$

   2) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\frac{1}{2}\cos\alpha$

   3) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$

   4) $\frac{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}$

3. Найдите значение выражения:

   1) $\cos 107^\circ\cdot\cos 17^\circ+\sin 107^\circ\cdot\sin 17^\circ$

   2) $\cos 36^\circ\cdot\cos 24^\circ-\sin 36^\circ\cdot\sin 24^\circ$

   3) $\sin 63^\circ\cdot\cos 27^\circ+\cos 63^\circ\cdot\sin 27^\circ$

   4) $\sin 51^\circ\cdot\cos 21^\circ-\cos 51^\circ\cdot\sin 21^\circ$

Контрольные вопросы:

1. Чему равен косинус разности двух углов?
2. Чему равен косинус суммы двух углов?
3. Чему равен синус суммы двух углов?

4. Чему равен синус разности двух углов?

Практическая работа №44 (1 час)

Тема: Применение формул удвоения.
Цель: Сформировать умение применять формулы удвоения аргумента к решению задач по изучаемой теме.

Теоретические сведения к практической работе

Формулы двойного аргумента

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

3) $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

Пример 1. Вычислите используя формулы двойного аргумента:

А) $cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8} = cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right) = cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Б) $2\sin 15^0\cdot\cos 15^0 = \sin(2\cdot 15^0) = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$.

В) $\frac{6tg75^0}{1-tg^2 75^0} = 3\,tg(2\cdot 75^0) = 3tg150^0 = 3\,tg(180^0 - 30^0) = -3\,tg30^0 = -\sqrt{3}$

Пример 2. Вычислите:

А) $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}3$

Решение: Применим формулу косинуса двойного угла

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2(-0{,}3)^2 = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$

Б) $\cos(\alpha+\beta)$ и $\sin 2\alpha$, если $sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$/

Решение: Сначала вычислим $\cos\alpha$ и $\sin\beta$:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \pm\sqrt{\frac{25}{25} - \frac{16}{25}} = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5},$$

т.к. $\alpha \in$ II четверти, то $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

$$sin\,\beta = \pm\sqrt{1 - cos^2\beta} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{25}{25} - \frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5},$$

т.к. $\beta \in$ IV четверти, то $\sin\beta = -\frac{4}{5}$

Применим формулу суммы аргументов косинуса:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta = -\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{7}{25}$.

Применим формулу двойного аргумента синуса: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$

Содержание практической работы

№ 1. Выразить синус, косинус, используя формулы двойного аргумента

$\sin 48^0$

$\cos 164$

$\sin \frac{4\pi}{3}$

$\cos \frac{5\pi}{3}$

№2. Вычислить:

1) $2\sin 15^0 \cos 15^0$

2) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$

№3. Вычислить:

3) $\cos^2 15 - \sin^2 15^0$

4) $\cos^2\frac{\pi}{8}$ - $\sin^2\frac{\pi}{8}$

5) $(\cos 75^0 - \sin 75^0)^2$

1) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

2) $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

3) $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

4) $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$

Практическая работа №45 (1 час)

Тема: Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.

Цель: Формирование прочных умений и навыков применения формул тригонометрии при выполнении упражнений и решении уравнений.

Теоретический материал к практической работе

Сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Разность синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Разность косинусов двух углов равна взятому со знаком «минус» удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на синус их полуразности

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Сумма тангенсов двух углов: $tgx + tgy = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$.

Разность тангенсов двух углов: $tgx - tgy = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}$

Пример 1. Вычислите $\sin 10° + \sin 50°$.

Решение:

$$\sin 10° + \sin 50° = 2\sin\frac{10°+50°}{2}\cdot\cos\frac{10°-50°}{2} = 2\sin 30°\cdot\cos(-20°) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 20° = \cos 20°$$

Пример 2. Вычислите $\cos 90° - \cos 30°$.

Решение:

$$\cos 90° - \cos 30° = -2\sin\frac{90°+30°}{2}\cdot\sin\frac{90°-30°}{2} = -2\sin 60°\cdot\sin 30° = -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Содержание практической работы

1. Представьте в виде произведения:

1) $\sin 40° + \sin 16°$

2) $\sin 20° - \sin 40°$

3) $\cos 46° - \cos 74°$

4) $\cos 15° + \cos 45°$

5) $\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5}$

6) $\cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{3\pi}{4}$

7) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \cos \alpha$

8) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

9) $tg 25° + tg 35°$

10) $tg \frac{\pi}{5} - tg \frac{\pi}{10}$

2. Докажите тождество:

1) $\frac{\sin 2x + \sin 6x}{\cos 2x + \cos 6x} = tg 4x$

2) $\sin 87° - \sin 59° - \sin 93° + \sin 61° = \sin 1°$

3) $\cos 115° - \cos 35° + \cos 65° + \cos 25° = \sin 5°$

Контрольные вопросы

1. Чему равна сумма синусов?
2. Чему равна сумма косинусов?
3. Чему равна разность синусов?

Практическая работа №46 (1 час)

Тема: Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

Цель: Сформировать умение решать примеры на формулы тригонометрических функций.

Содержание практической работы

1. Упростите выражения:

1) $\frac{\sin 2x}{\sin x}$

2) $\cos 2x + \sin^2 x$

3) $\frac{\sin 2x}{\cos x} - \sin x$

4) $\frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} - \cos x$

5) $\frac{2\cos^2 x}{\sin 2x}$

6) $\left(1 - tg^2 x\right) \cdot \cos^2 x$

2. Докажите тождества:

1) $1 - (\sin x - \cos x)^2 = \sin 2x$

2) $ctgx - \sin 2x = ctgx \cdot \cos 2x$

3) $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x = 1$

4) $4\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \sin 4x$

5) $\sin 2x - tgx = \cos 2x \cdot tgx$

Практическая работа №47 (1 час)

Тема: Решение задач по теме «Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс».

Цель: Проверить, закрепить знания по рассматриваемой теме.

Содержание практической работы

1. Вычислить:

   а) arccos (cos $\frac{\pi}{14}$), б) cos(arccos 0,25),в) arcsin (sin $\frac{\pi}{17}$),

   г) sin(arcsin 0,45), д) sin (arccos 0,8),е)tg(arcsin 0,6).

2. Вычислить cos(4arctg 3).

3. Вычислить arcsin (sin 6).

4. Вычислить $\sin\left(\arccos\frac{5}{13} - \operatorname{arctg} 3\right)$.

5. Вычислить $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2)$.

6. Вычислить sin (2 arcsin 0,8).

7. Вычислить arccos x – arcsin x = – arccos $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Решите уравнения:

а) 6arcsin (x^2 – 7x+12,5) = π ;

б) 3$\arcsin^2$x – 11arcsinx + 6 = 0.

9. Вычислить: а) arcsin (– 4), б) arccos $\frac{2\pi}{3}$.

10. Вычислить arcctg x, если известно, что arctg x = $\frac{\pi}{3}$.

Практическая работа №48 (1 час)

Тема: Решение простейших тригонометрических уравнений.

Цель: Проверить, закрепить знания по рассматриваемой теме; продолжить развитие умения решать тригонометрические уравнения с применением тригонометрических формул.

Содержание практической работы

Вариант 1

Решите уравнения

1) $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $sinx = 5$

3)$tgx = 1$

4) $2sin - 1 = 0$

5)$sin2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6)$tg\frac{x}{2} = \sqrt{3}$

7)$\left(sinx - \frac{1}{2}\right)(sinx + 1) = 0$

8)$sinx + \sqrt{3}cosx = 0$

9) $2cos^2x - 7cosx - 4 = 0$

Вариант 2

Решите уравнения

1) $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2) $cosx = 9$
3) $tgx = \sqrt{3}$
4) $2cosx - 1 = 0$
5) $cos\frac{x}{3} = \frac{1}{2}$
6) $tg2x = \sqrt{3}$
7) $\left(cosx - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(sinx - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$
8) $5cos^2x + 9cosx - 2 = 0$

Требования к отчету: отчет должен содержать решение заданий с указаниями на теоретические факты, использованные при решении**.**

Практическая работа №49 (1 час)

Тема: Решение тригонометрических уравнений.

Цель: Проверить, закрепить знания по рассматриваемой теме; продолжить развитие умения решать тригонометрические уравнения с применением тригонометрических формул.

Содержание практической работы

Решите уравнение $\sin x + \frac{1}{2} = 0$.

1) $\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$ 2) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$ 3) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$ 4) $\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

2. Решите уравнение $cos2x = 0$.

1) $\tilde{o}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z$; 2) $\tilde{o}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; 3) $\tilde{o}=\frac{\pi}{2}n, n\in Z$; 4) $\tilde{o}=\pi+2\pi n, n\in Z$.

3. Решите уравнение $ctg^2 x = 3$.

1) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$; 3) $\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; 4) $\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$.

4. Решите уравнение $-3sinx = 0$.

1) πm, $m\in Z$; 2) $2\pi m$, $m\in Z$; 3) $\frac{\pi m}{-3}$, $m\in Z$; 4) $\frac{2\pi m}{-3}$, $m\in Z$.

5. Решите уравнение $tg\frac{x}{2}=\sqrt{3}$.

1) $\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$ 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$ 3) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$ 4) $\frac{2\pi}{3}+\pi n, n\in Z$

6. Решите уравнение $cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right)=0$.

1) $x=\pi+\pi k$, $k\in Z$; 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; 3) $x=2\pi k$, $k\in Z$; 4) $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$.

7. Решите уравнение $ctg\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=0$.

1) $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$; 2) $x=-\pi k$, $k\in Z$; 3) $x=-\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; 4) $x=2\pi k$, $k\in Z$.

8. Решите уравнение $sinx - sin^2 x = cos^2 x$.

1) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; *2)* $x=2\pi k,\ k\in Z$; *3)* $x=\pi k,\ k\in Z$; *4)* $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

9. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения $\cos(-x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) $\frac{\pi}{4}$ 2) 0 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) $\frac{3\pi}{4}$

10. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения $\sin(-x)=\frac{1}{2}$.

Практическая работа №50 (1 час)

Тема: Решение простейших тригонометрических неравенств.

Цель: Проверить, закрепить знания по рассматриваемой теме; продолжить развитие умения решать тригонометрические неравенства с применением тригонометрических формул.

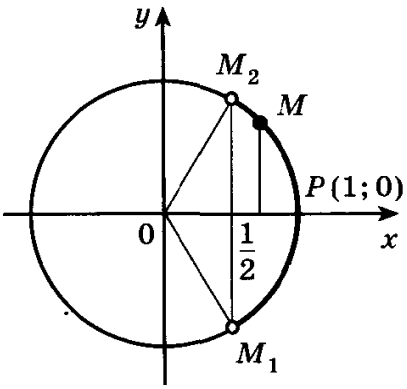
Теоретические сведения

<u>Определение</u>

Неравенства, содержащие переменную под знаком тригонометрической функции, называются тригонометрическими.

При решении тригонометрических неравенств используют единичную окружность.

<u>Пример</u> Решить неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$.



По определению cos x – это абсцисса точки единичной окружности. Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки единичной окружности M_1 и M_2. Абсциссу, большую $\frac{1}{2}$ имеют все точки M дуги единичной окружности, лежащие правее прямой M_1M_2. Таким образом, решениями неравенства cos x > $\frac{1}{2}$ являются все числа x из промежутка $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$.

Все решения данного неравенства – множество интервалов $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Содержание практической работы

Вариант 1.

Решить неравенства:

1) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x \leq \frac{1}{2}$; 4) $\sin x > -\sqrt{3}$ 5) $\sin 3x > -\frac{1}{2}$

Вариант 2.

Решить неравенства:

1) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x \geq \frac{1}{2}$; 4) $\sin x < -\sqrt{3}$ 5) $\sin 3x < -\frac{1}{2}$

Требования к отчету:

Отчет должен содержать решение заданий с указаниями на теоретические факты, использованные при решении**.**

Практическая работа №51, 52 (2 часа)

Тема: Выполнение заданий по теме: «Определение функций». Построение и чтение графиков функций.

Цель: Обобщить и систематизировать знания по теме. Закрепить умения использовать полученные знания для построения и чтения графиков функций.

Теоретические сведения к практической работе

Опр. Функция вида $y = x^p$, где $p \in$ R (любое действительное число), называется степенной.

Степенная функция с натуральным показателем.

Функция $y = x^n$, где n - натуральное число, называется степенной функцией с натуральным показателем.
При n = 1 получаем функцию y = x.
При n = 2 получаем функцию $y = x^2$.

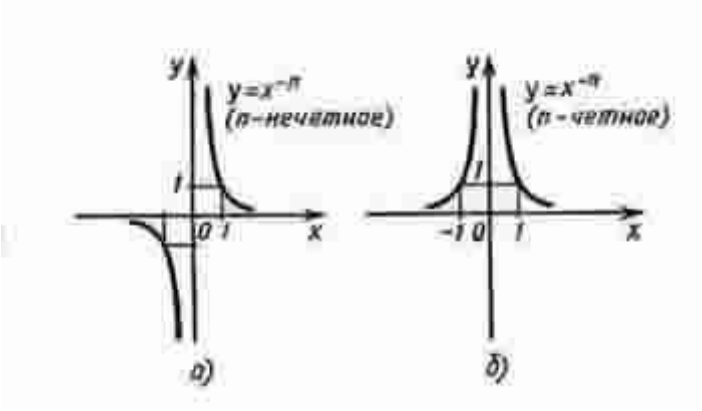
Пусть n - произвольное четное натуральное число, большее двух: n = 4, 6, 8, ... В этом случае функция y = xn обладает теми же свойствами, что и функция y = x2. График такой функции напоминает параболу y = x2, только ветви графика при |x| > 1 тем круче идут вверх, чем больше n, а при |x| < 1 тем "теснее прижимаются" к оси x, чем больше n.

Пусть n - произвольное нечетное число, большее трех: n = 5, 7, 9, … . В этом случае функция y = xn обладает теми же свойствами, что и функция y = x3. График такой функции напоминает кубическую параболу (только ветви графика тем круче идут вверх, вниз, чем больше n) Отметим также, что на промежутке (0; 1) график степенной функции y = xn тем медленнее отдаляется от оси x с ростом x, чем больше n.

Степенная функция с целым отрицательным показателем.

Рассмотрим функцию $y = x^{-n}$, где n - натуральное число.
При n = 1 получаем $y = x^{-1}$ или y = 1/x. Свойства этой функции рассмотрены выше.

Пусть n - нечетное число, большее единицы, n = 3, 5, 7, …
В этом случае функция $y = x^{-n}$ обладает в основном теми же свойствами, что и функция y = 1/x. График функции $y = x^{-n}$ (n = 3, 5, 7, …) напоминает график функции y = 1/x (рис. а).



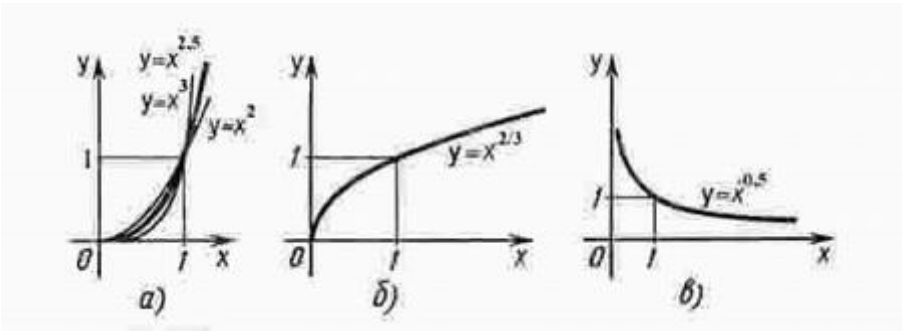
Пусть n - четное число, например n = 2.
Перечислим некоторые свойства функции $y = x^{-2}$, т. е. функции $y = 1/x^2$.
1) Функция определена при всех $x \neq 0$
2) $y = 1/x^2$ - четная функция.
3) $y = 1/x^2$ убывает на $(0; +\infty)$ и возрастает на $(-\infty; 0)$.

Теми же свойствами обладают любые функции вида $y = x^{-n}$ при четном n, большем двух.

График функции $y = 1/x^2$ изображен на рисунке б. Аналогичный вид имеет график функции $y = x^{-n}$, если n = 4, 6, ...

Степенная функция с положительным дробным показателем.

Рассмотрим функцию $y = x^r$, где r - положительная несократимая дробь.
Перечислим некоторые свойства этой функции.
1) Область определения - луч $[0; +\infty)$.
2) Функция ни четная, ни нечетная.
3) Функция $y = x^r$ возрастает на $[0; +\infty)$.



Степенная функция с отрицательным дробным показателем.

Рассмотрим функцию $y = x^{-r}$, где r - положительная несократимая дробь.

Перечислим свойства этой функции.
1) Область определения - промежуток $(0; +\infty)$.
2) Функция ни четная, ни нечетная.
3) Функция $y = x^{-r}$ убывает на $(0; +\infty)$

Построим график функции $y = x^{-1/2}$ (рис. в). Подобный вид имеет график любой функции $y = x^r$, где r - отрицательная дробь.

Содержание практической работы

Задание 1. Найдите область определения функции

а) $y = x^2 - 12$;

б) $y = \frac{3x-7}{x^2}$;

в) $y = x^{3/2} - 1$;

г) $y = \sqrt[4]{16-x}$;

д) $y = 3x^{5/2} - 1$

Задание 2. Постройте и прочитайте график степенной функции:

а) $y = 2x^3 - 5x$;

б) $y = \frac{3}{x^2}$;

в) $y = \frac{1}{3}x^2$;

г) $y = 2x^{-3}$

Практическая работа №53 (1 час)

Тема: Преобразования графиков.
Цель: Систематизировать полученные знания на практике.

Содержание практической работы

Построить графики функций:

1) $y = (x + 4)^2$
2) $y = (x - 2)^2$
3) $y = x^2 + 2$
4) $y = x^2 - 1$
5) $y = 3x^2$
6) $y = 0{,}5x^2$
7) $y = -x^2$
8) $y = (3x)^2$
9) $y = (0{,}5x)^2$
10) $y = |x^2 - 4|$

Практическая работа №55, 56 (2 часа)

Тема: Выполнение заданий по теме: «Непрерывные и периодические функции», «Исследование функций».

Цель: Закрепить полученные знания на практике.

Теоретические сведения к практической работе

В стандартную схему исследования функции обычно включают следующие пункты.

1. Область определения функции.
2. Нули (корни) функции.
3. Промежутки знакопостоянства.
4. Точки экстремума функции.
5. Промежутки возрастания и убывания (монотонность) функции.
6. Наибольшее и наименьшее значения функции.
7. Множество значений функции.

Дадим краткое описание тех понятий, которые включены нами в схему исследования функции.

1. Область определения – множество значений аргумента, при которых задана функция. Если функция задана формулой, то имеется в виду ее естественная область определения, т. е. множество чисел, к которым применима данная формула.

Примеры:

а) $y = x^2 - 1$, D: $\boldsymbol{R}$, или x – любое число.

б) $y = \sqrt{1 - x^2}$, D: $[-1; 1]$.

в) $y = \dfrac{1}{x - 1}$, D: x ¹ 1, или x – любое число, кроме $x = 1$.

г) $y = \sqrt{x}$, D: $[0; +¥)$, или x – любое неотрицательное число.

Во всех этих примерах указывалась *естественная* область определения функции.

2. Нули (корни) – точки, в которых функция обращается в нуль, или, иначе, решения уравнения *f(x)* = 0.

Примеры:

а) $y = 2x - 1$, один нуль: $x = \dfrac{1}{2}$.

б) $y = x^2 + x - 2$, нули: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

в) $y = x^2 + x + 2$, нулей нет.

г) $y = x - [x]$, нули: все целые числа.

3. Промежутки знакопостоянства – интервалы, на которых функция положительна или отрицательна, или, иначе, решения неравенств *f(x)* > 0 и *f(x)* < 0.

Примеры:

а) $y = \dfrac{1}{x - 2}$, $y < 0$ при $x < 2$; $y > 0$ при $x > 2$, или $y < 0$ при x Î $(-¥; 2)$, $y > 0$ при x Î $(2; +¥)$.

б) $y = \sqrt{x} - 2$, $y < 0$ при x Î $(0; 4)$, $y > 0$ при x Î $(4; +¥)$.

в) $y = \dfrac{1}{(x - 2)^2}$, $y > 0$ при всех допустимых значениях x, или при x Î $(-¥; 2)$ È $(2; +¥)$.

г) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, $y < 0$ при x Î $(-¥; -1)$ È $(0; 1)$; $y > 0$ при x Î $(-1; 0)$ È $(1; +¥)$.

4. Точки экстремума – точки, лежащие внутри области определения, в которых функция принимает самое большое (максимум) или самое малое (минимум) значение по сравнению со значениями в близких точках.

Примеры:

а) $y = \frac{1}{x}$, экстремумов нет.

б) $y = x^2 - 2x$, $x = 1$ – точка минимума. Значение в этой точке равно -1: $y(1) = -1$.

в) $y = x + \frac{1}{x}$,

$x = -1$ – точка максимума, $y(-1) = -2$;
$x = +1$ – точка минимума, $y(+1) = 2$.

г) $y = |x|$, $x = 0$ – точка минимума, $y(0) = 0$.

5. Промежутки возрастания и убывания – интервалы, на которых функция или возрастает, или убывает. Слова “возрастание” и “убывание” функции иногда заменяют одним словом – “монотонность” функции.

Примеры:

а) $y = 1 - x$, y убывает на всей числовой оси.

б) $y = x^2 - 1$, y убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$

в) $y = -\frac{1}{x}$, y возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

г) $y = x^3 + x$, y возрастает на всей числовой оси.

6. Наибольшее и наименьшее значения функции – самое большое или самое маленькое значение функции по сравнению со всеми возможными (в отличие от экстремумов, где сравнение ведется только с близкими точками).

Примеры:

а) $y = 1 - x$; функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
б) $y = -x$, $x \in [-1; 1]$; наибольшее и наименьшее значения функция принимает на концах промежутка: $y(-1) = 1$ – наибольшее значение; $y(1) = 1$ – наименьшее значение.
в) $y = x^2 - 1$; наименьшее значение функция принимает при $x = 0$,
$y(0) = -1$. Наибольшего значения y функции нет.
г) $y = -x^2 + 2x$, $x \in [1; 3]$, наибольшее и наименьшее значения функция принимает на концах промежутка: $y(1) = 1$ – наибольшее значение;
$y(3) = -3$ – наименьшее значение.

7. Множество значений функции – множество чисел, состоящее из всех значений функции.

Примеры

а) $y = -x$, E: R, или y – любое число.

б) $y = -x$, $x \in [-1; 1]$. E: $[-1; 1]$.

в) $y = x^2 - 1$, E: $[-1; +\infty)$.

г) $y = -x^2 + 2x$, $x \in [0; 3]$, E: $[-3; 1]$

Построим :

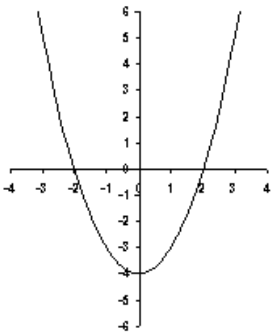
Для построения графика функции $y = |f(x)|$ для всех x из области определения, надо ту часть графика функции $y = f(x)$, которая располагается ниже оси абсцисс

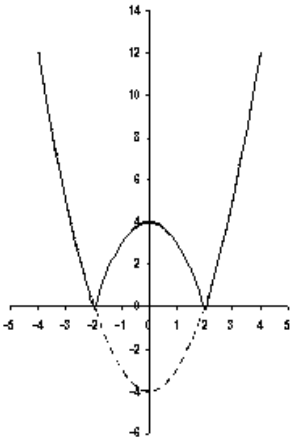
($f(x) < 0$), отразить симметрично этой оси.

Таким образом, график функции $y = |f(x)|$ расположен только в верхней полуплоскости.

Пример: $y = |x^2 - 4|$.

Строим график функции $y = x^2 - 4$





Как правило, учащиеся хорошо понимают правило построения графика такой функции. Его можно легко довести до автоматизма. Во избежание формализма в знаниях и умениях учащихся необходимо чередовать построение графиков вида $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

С построением графиков зависимостей вида $|y| = f(x)$ учащихся можно познакомить на внеклассных занятиях, ибо такие графики вызывают наибольшие затруднения. Учитывая, что в формуле $|y| = f(x)$ $f(x) \geq 0$ и на основании определения модуля

$$|y| = \begin{cases} y, если \quad y \geq 0, \\ -y, если \quad y < 0 \end{cases}$$

перепишем формулу $|y| = f(x)$ в виде $y = \pm f(x)$, где $f(x) \geq 0$.

Исходя из этого, можно сформулировать правило 3.

Правило: для построения графиков зависимости (а не функции) достаточно построить график функции y = f(x) для тех x из области определения, при которых f(x) ≥ 0 и отразить полученную часть графика, симметрично оси абсцисс.

Таким образом, график зависимости |y| = f(x) состоит из графиков двух функций: y = f(x) и y = -f(x), где f(x) ≥ 0.

Содержание практической работы

1. Найдите область определения функции: $y = \frac{\sqrt{8-x}}{x^2-12x+36}$.

2. Определите четность (нечетность) функции:

   а) $y = \frac{5}{x^3} + 3x$;

   б) $y = \frac{tg3x + ctg3x}{|x|}$.

3. Пусть $f(x) = x - \frac{1}{x}$. Найдите: а) f(-5) и $f(\frac{1}{4})$; б) f(4) и f(-0,25)

4. Определите множество значений функции y = -1 + 2 cosx.

5. Постройте график функции $y = 1 - (x + 2)^2$.

   По графику определите промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.

Практическая работа №57 (1 час)

Тема: Решение задач по теме: «Свойства линейной, квадратичной, кусочно-линейной и дробно-линейной функций».

Цель: Проверить полученные знания.

Содержание практической работы

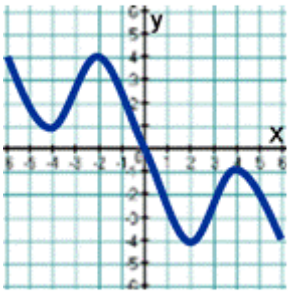
Вариант 1

А1. Найдите область определения каждой из функций:

а) $f(x)=3\sin x-2tgx;$ *б)* $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2-2}$.

А1. Определите, является ли функция $f(x)=\cos x-\dfrac{1}{2}x^4$ четной или нечетной?

А3. Найдите наименьший положительный период функции $y=\sin\dfrac{x}{4}$.



В1. Найдите область определения функции

$f(x)=1-\dfrac{1}{\cos x}$.

В2. Проведите по общей схеме исследование функции, заданной графиком, изображенным на рисунке.

С1. Исследуйте функцию $y=2\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ и постройте ее график.

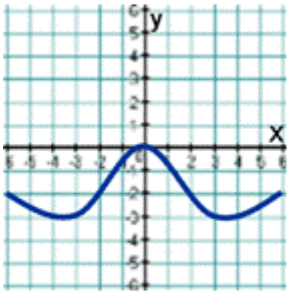
Вариант 2

А1. Найдите область определения каждой из функций:

а) $f(x)=2ctgx-\sin x;$ *б)* $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x-9}$.

А1. Определите, является ли функция $f(x)=\sin x-4x^3$ четной или нечетной?

А3. Найдите наименьший положительный период функции $y=\dfrac{1}{4}\cos 6x$.



В1. Найдите область определения функции

$f(x)=\dfrac{1}{1+\sin x}$.

В2. Проведите по общей схеме исследование функции, заданной графиком, изображенным на рисунке.

С1. Исследуйте функцию $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ и постройте ее график.

Практическая работа №58 (1 час)

Тема: Выполнение заданий по теме: *Обратные функции и их графики.*

Цель: Освоение знаний об обратных функциях; овладение умениями изображать графики обратных функций и описывать их свойства; использование знаний о характере поведения функций для описания и анализа реальных зависимостей.

Содержание практической работы

Задание:

1. Дайте определение обратимой функции : _____

_____

_____

2. Дайте определение обратной функции: _____

_____

_____

3. Используя рисунки, на которых изображены графики взаимно обратных функций, опишите их свойства.

Рис. 1 Графики взаимно обратных линейных функций

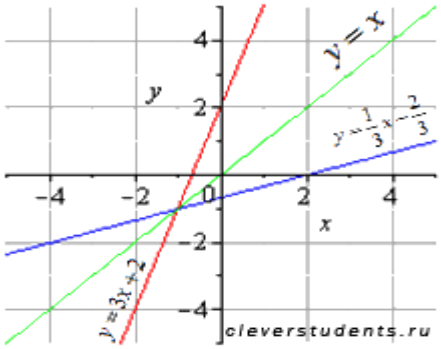


Рис. 2 Графики взаимно обратных показательной и логарифмической функций

Для а > 1 Для а < 0< 1

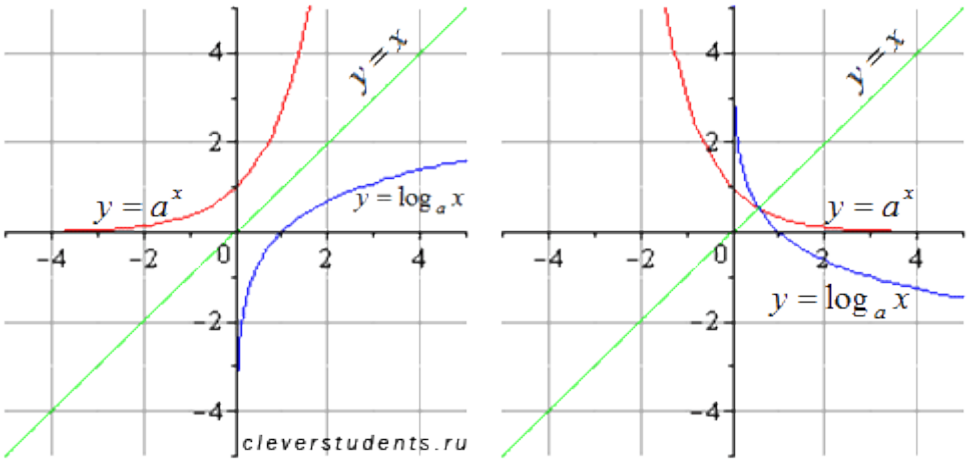
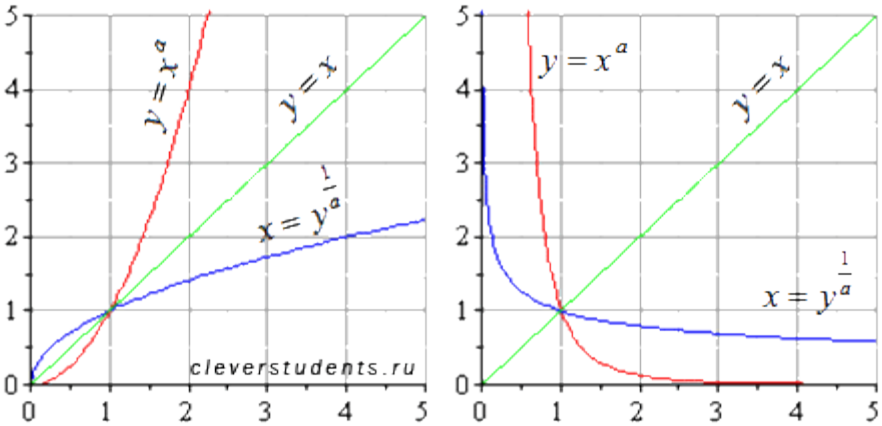


Рис. 3 Графики взаимно обратных степенных функций

Для a > 0 Для a < 0



Содержание отчета:

1. Ответы по описанию свойств функций внесите в таблицы:

Таблица 1

Свойства взаимно обратных линейных функций

Свойства функции	Функция	
	y = k x + b	$y = \frac{1}{k} x + \frac{b}{k}$
Область определения		
Множество		

значений		
Промежутки монотонности		

Для заполнения таблицы используйте рис. 1

Таблица 2

Свойства взаимно обратных показательной и логарифмической функций

при a > 1

Свойства функции	Функция	
	$y = a^x$, a>1	$y = \log_a x$, a > 1
Область определения		
Множество значений		
Промежутки монотонности		

Для заполнения таблицы используйте рис.2 при a > 1

Таблица 3

Свойства взаимно обратных показательной и логарифмической функций при 0< a < 1

Свойства функции	Функция	
	$y = a^x$, 0 < a< 1	$y = \log_a x$, 0 < a< 1
Область определения		
Множество значений		
Промежутки		

монотонности		

Для заполнения таблицы используйте рис. 2 при $0 < a < 1$

Таблица 4

Свойства взаимно обратных степенных функций при $a > 0$

Свойства функции	Функция	
	$y = x^{\alpha}$, $\alpha > 0$	$x = y^{\frac{1}{\alpha}}$ $\alpha > 0$
Область определения		
Множество значений		
Промежутки монотонности		

Для заполнения таблицы используйте рис. 3 при $a > 0$

Таблица 5

Свойства взаимно обратных степенных функций при $a < 0$

Свойства функции	Функция	
	$y = x^{\alpha}$, $\alpha < 0$	$x = y^{\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha < 0$
Область определения		
Множество значений		
Промежутки монотонности		

Для заполнения таблицы используйте рис. 3 при $a < 0$.

Контрольные вопросы:

1. Покажите, что для функции y = 5x – 3 существует обратная функция, и найдите ее аналитическое выражение.

2. Покажите, что для функции $y = x^2$, где x принадлежит промежутку

(-∞; 0], существует обратная функция, и найдите ее аналитическое выражение.

Практическая работа №59 (1 час)

Тема: Решение показательных и логарифмических неравенств.
Цель: выработать навык решения неравенств, закрепить навык работы со степенями

Теоретические сведения к практической работе

Неравенства вида $a^x > c, a^x < c, f(x)^{\varphi_1(x)} > f(x)^{\varphi_2(x)}$, где *a>0, a≠1, c>0,* называются простейшими показательными неравенствами. Имеют место следующие равносильные преобразования:

I. $a^{f(x)} < a^{\varphi(x)} \rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < a < +\infty \\ a^{f(x)} < a^{\varphi(x)} \\ f(x) < \varphi(x) \end{array}\right.$

II. $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < a < +\infty \\ a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \\ f(x) > \varphi(x) \end{array}\right.$

III. $a^{f(x)} < a^{\varphi(x)} \rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < a < 1 \\ a^{f(x)} < a^{\varphi(x)} \\ f(x) > \varphi(x) \end{array}\right.$

IV. $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < a < 1 \\ a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \\ f(x) < \varphi(x) \end{array}\right.$

V. $(f(x))^{\varphi(x)} > 1 \rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > 1 \\ \varphi(x) > 0 \end{array}\right.$

VI. $(f(x))^{\varphi(x)} > 1 \rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < f(x) < 1 \\ \varphi(x) < 0 \end{array}\right.$

VII. $(f(x))^{\varphi(x)} < 1 \rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > 1 \\ \varphi(x) < 0 \end{array}\right.$

Содержание практической работы

Решить неравенства:

1. $2^{x^2-8x+18} > 8$
2. $(\frac{1}{3})^x \geq 27;$

3. $(\sqrt{6})^{x} \leq \frac{1}{36}$;
4. $0{,}2^{x} \leq \frac{1}{25}$;
5. $1{,}5^{x} < 2{,}25$.
6. $5^{2x} - 7^{x} - 35 \cdot 5^{2x} + 35 \cdot 7^{x} > 0$
7. $2^{x^2} > (\frac{1}{2})^{2x-3}$
8. $\pi^{x} - \pi^{2x} \geq 0$
9. $(\frac{1}{25})^{2x} < (\sqrt{5})^{x^2+3{,}75}$
10. $(\frac{1}{4})^{10x} > 64^{2\frac{2}{3}-x^2}$
11. $3^{4x+3} \leq (\frac{1}{9})^{\frac{x^2}{2}}$.

Решите графически неравенство:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} \leq 2x + 5$

б) $3^{x} \geq 4 - x$

Івариант	Івариант
1. $\log_5(3 - 8x) > 0$ (1 б)	1. $\log_3(2 + x) > 0$ (1б)
2. $\log_3(x - 8) \leq 1$ (1 б)	2. $\log_2(3x - 2) \leq 1$ (1 б)
3. $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) > -2$ (1 б)	3. $\log_{\frac{1}{3}}(x + 2) > -2$ (1 б)
4. Lg (x^2 +2x+2) <1 (2 б)	4. Lg(x^2 +x+4)< 1 (2 б)

Практическая работа №60,61 (2 часа)

Тема: Выполнение заданий по теме: «Свойства и графики синуса, косинуса», «Свойства и графики тангенса и котангенса».

Цель: Обобщить и систематизировать знания по теме «графики тригонометрических функций». Закрепить умения использовать полученные знания для построения и чтения графиков функций.

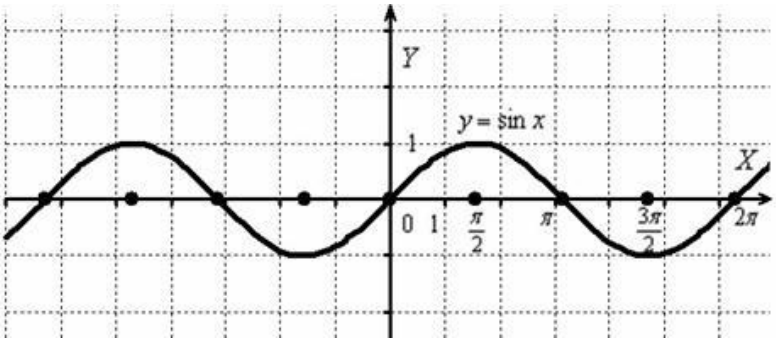
Теоретические сведения к практической работе

Правило: чтобы построить график функции $f(kx)$, где $k > 1$, нужно график функции $f(x)$ сжать к оси OY в k раз.

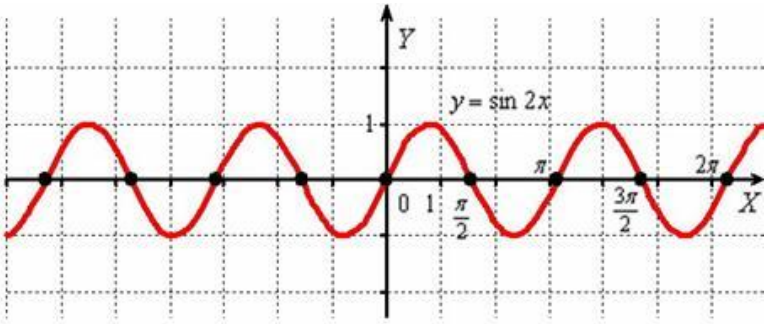
<u>Пример</u>

Построить график функции $y = \sin 2x$.

Сначала изобразим график синуса, его период равен $T = 2\pi$:



Мысленно возьмём синусоиду в руки и сожмём её к оси OY в 2 раза:



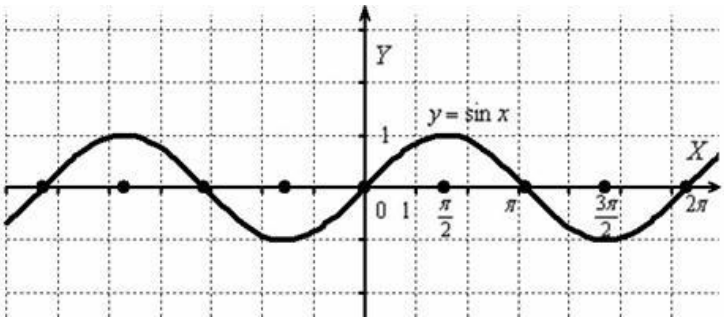
То есть, график функции $y = \sin 2x$ получается путём сжатия графика $y = \sin x$ к оси ординат в два раза. Логично, что период итоговой функции тоже уполовинился: $T = \pi$

Растяжение графика функции от оси ординат

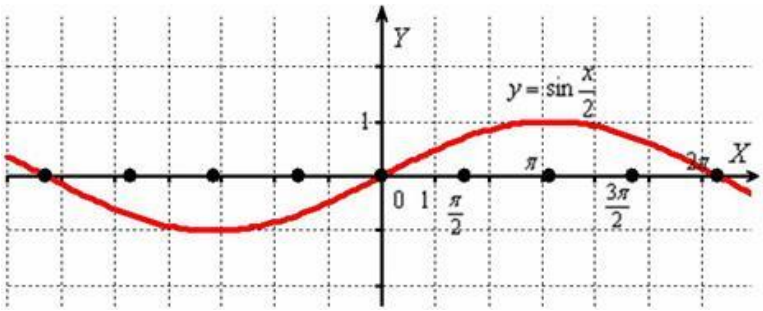
Правило: чтобы построить график функции $f(kx)$, где $0 < k < 1$, нужно график функции $f(x)$ растянуть от оси OY в $\frac{1}{k}$ раз.

<u>Пример</u>

Построить график функции $y = \sin\frac{x}{2}$



И растягиваем её от оси OY в 2 раза:



То есть, график функции $y=\sin\frac{x}{2}$ получается путём растяжения графика $y=\sin x$ от оси ординат в два раза. Период итоговой функции увеличивается в 2 раза: $T=2\pi\cdot 2=4\pi$

Правило: чтобы построить график функции $mf(x)$, где $m>1$, нужно график функции $f(x)$ растянуть вдоль оси OY в m раз.

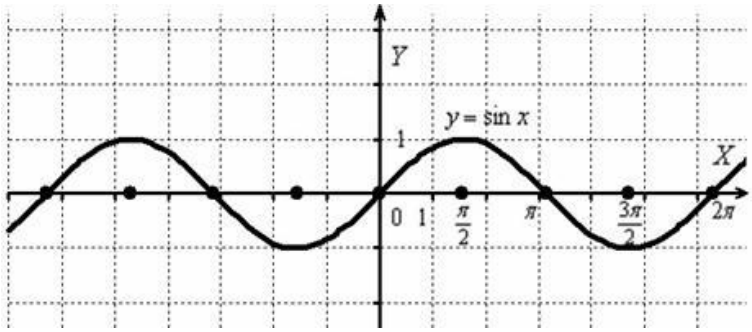
2) Если ФУНКЦИЯ умножается на число $0<m<1$, то происходит сжатие её графика вдоль оси ординат.

Правило: чтобы построить график функции $mf(x)$, где $0<m<1$, нужно график функции $f(x)$ сжать вдоль оси OY в $\frac{1}{m}$ раз.

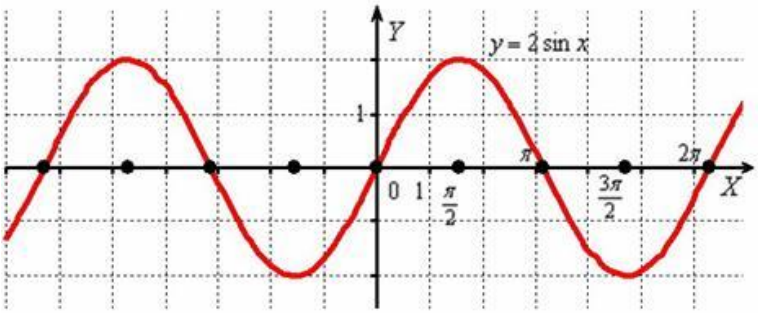
<u>Пример</u>

Построить графики функций $y=2\sin x,\quad y=\frac{1}{2}\sin x$.

Берём синусоиду за макушку/пятки:



И вытягиваем её вдоль оси OY в 2 раза:



Период функции $y=2\sin x$ не изменился и составляет $T=2\pi$, а вот значения (все, кроме нулевых) увеличились *по модулю* в два раза

Содержание практической работы

Вариант 1.

1. Постройте график функции: а) $y = 4\cos 2x$;

б) $y = -2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

в) $y = -\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

г) $f(x) = \begin{cases} sinx, \text{если } x > 0 \\ x^2, \text{если } x \leq 0 \end{cases}$

Вариант 2.

1. Постройте график функции: а) $y = -2\cos 2x$;

б) $y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

в) $y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$

г) $f(x) = \begin{cases} cosx, \text{если } x > 0 \\ x^2, \text{если } x \leq 0 \end{cases}$

Практическая работа №63 (1 час)

Тема: Решение тригонометрических уравнений и неравенств.

Цель: Закрепление умений в решении простейших тригонометрических уравнений, уравнений, приводимых к простейшим и уравнений, приводимых к квадратным.

Содержание практической работы

I. Решите простейшие тригонометрические уравнения

1. cos x = $\frac{1}{2}$	8. tg x = $\sqrt{3}$	15. ctg$\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$
2. cos x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$	9. ctg x = $\sqrt{3}$	16. tg$\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
3. cos x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$	10. ctg x = 0	17. tg$\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$
4. sin x = $\frac{1}{2}$	11. tg$\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$	18. ctg$\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

5. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	12. $\text{ctg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$	19. $\text{ctg}\,4x=\frac{\sqrt{3}}{3}$
6. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	13. $\text{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$	20. $\text{ctg}\,3x=\frac{\sqrt{3}}{3}$
7. $\text{tg}\, x = 1$	14. $\text{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$	

II. Решите простейшие тригонометрические уравнения

1. $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$	6. $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$
2. $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$	7. $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$
3. $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$	8. $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$
4. $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$	9. $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$
5. $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$	10. $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

III. Решите уравнения, приводимые к квадратным

1. $2\sin^2 x - 5\sin x - 7 = 0$	6. $4\cos^2 x + \cos x - 5 = 0$
2. $3\sin^2 x - 7\sin x + 4 = 0$	7. $2\cos^2 x - 5\cos x - 7 = 0$
3. $3\cos^2 x - 10\cos x + 7 = 0$	8. $3\sin^2 x - 5\sin x - 8 = 0$
4. $6\sin^2 x - 7\sin x - 5 = 0$	9. $4\sin^2 x + \sin x - 5 = 0$
5. $3\cos^2 x - 5\cos x - 8 = 0$	10. $5\sin^2 x + 12\sin x + 7 = 0$

Практическая работа №64 (1 час)

Тема: Выполнение заданий по теме: «Различные виды многогранников, их изображения».

Цель: Сформировать умение решать задачи по теме: «Прямая, правильная и наклонная призма».

Теоретические сведения к практической работе

Для выполнения практической работы используйте следующие сведения:

- Если боковые рёбра призмы перпендикулярны основаниям, то призма называется прямой, в противном случае наклонной.
- Прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник, называется правильной.
- Перпендикуляр, опущенный из любой точки верхнего основания на плоскость нижнего основания, называется высотой призмы. У прямой и правильной призмы высота равна боковому ребру.
- Диагональю призмы называется любой отрезок, соединяющий две не лежащие в одной грани вершины призмы.
- Диагональное сечение - это сечение, которое проходит через одну из диагоналей основания и боковое ребро.

Параллелепипед. Наиболее часто встречающимся видом призмы является параллелепипед.

<u>Опр.</u> Параллелепипедом называется призма, в основании которой лежит параллелограмм.

- Все грани параллелепипеда - параллелограммы.

- Параллелепипед, боковые рёбра которого перпендикулярны к плоскостям оснований, называется прямым. (Основание прямого параллелепипеда – параллелограмм, а боковые грани – прямоугольники).

- Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется прямоугольным параллелепипедом. Все грани прямоугольного параллелепипеда - прямоугольники. Длины трёх рёбер прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, называются его измерениями (длиной, шириной, высотой).

Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов 3-х его измерений: $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

Содержание практической работы

Часть 1

Вариант 1

1. Сколько рёбер у шестиугольной призмы?

2. Какое наименьшее число граней может иметь призма?

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Каково расположение прямых B_1D_1 и AC ?

4. Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется…

5. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 12 см. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите боковое ребро призмы.

6. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 3, а высота - 5. Вычислите объём призмы.

Вариант 2

1. Сколько граней у шестиугольной призмы?
2. Какое наименьшее число рёбер может иметь призма?
3.Три ребра параллелепипеда равны 6 м, 8 м и 10 м. Найдите сумму длин всех его рёбер.
4. Прямая призма называется правильной, если ее основания…
5. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 2, а высота - 4. Вычислите объём призмы.

6. Основание прямой призмы прямоугольный треугольник с гипотенузой 10см и острым углом 30^0. Диагональ боковой грани, содержащей катет противолежащий данному углу, равна 13 см. Найдите объем призмы.

Часть 2

1. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 7 см и 24 см, а диагональ параллелепипеда - $5\sqrt{29}$ см. Найти площадь диагонального сечения параллелепипеда.
2. В прямом параллелепипеде с высотой 15 м стороны основания ABCD равны 2 м и 4 м, диагональ AC равна 5 м. Найдите площадь диагонального сечения параллелепипеда, проходящего через вершины B и D.
3. Найдите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 2 см, 3 см и 4 см.

4. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 3 см и 5 см, а одна из диагоналей – 4 см. Меньшая диагональ параллелепипеда с плоскостью основания составляет угол в 60^0. Определить диагонали параллелепипеда.
5. В прямом параллелепипеде боковое ребро 1 м, стороны основания 23 дм и 11 дм, а диагонали основания относятся как 2:3. Найдите площади диагональных сечений.

Практическая работа №65, 66 (2 часа)

Тема: Выполнение заданий по теме: «Виды симметрий в пространстве». «Симметрия многогранников и тел вращения».

Цель: Формирование у обучающихся самостоятельности, наблюдательности, трудолюбия, умения сравнивать делать вывод; прививать чувства ответственности и сознательного отношения к изучаемому материалу.

Теоретические сведения к практической работе

Симметрия – это закономерная повторяемость элементов (или частей) фигуры или какого-либо тела, при которой фигура совмещается сама с собой при некоторых преобразованиях (вращение вокруг оси, отражение в плоскости).
Понятие симметрии включает в себя такие понятия, как: *ось симметрии, центр симметрии и плоскость симметрии.*
Ось симметрии - воображаемая ось, при повороте вокруг которой на некоторый угол, фигура совмещается сама с собой в пространстве (α)
Центр симметрии - это точка внутри многогранника, в которой пересекаются и делятся пополам прямые, соединяющие одинаковые элементы многогранника (грани, рёбра, углы) (С).
Плоскость симметрии делит многогранник на 2 зеркально равные части (Р).
Степенью симметрии называется совокупность всех элементов симметрии, которыми обладает данный многогранник.

Содержание практической работы

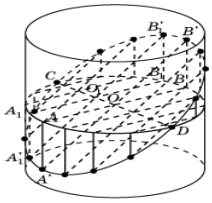
1. Изобразить все варианты симметрии куба.
2. Изобразить все варианты симметрии параллелепипеда.
3. Изобразить все варианты симметрии призмы.
4. Изобразить все варианты симметрии пирамиды.

Практическая работа №67 (1 час)

Тема: Выполнение заданий по теме: «Сечения, развертки многогранников».
Цель: Сформировать умение решать задачи по теме: «Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка».

Теоретические сведения к практической работе

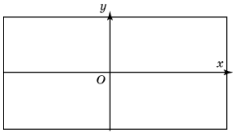
Сечения цилиндра: Сечения цилиндра плоскостью можно рассматривать как параллельные проекции основания цилиндра на эту плоскость. Поэтому, если плоскость параллельна плоскости основания, то в сечении получается круг, равный основанию.



Если плоскость сечения составляет некоторый угол с плоскостью основания цилиндра и не пересекает основания, то в сечении будет фигура, ограниченная эллипсом.

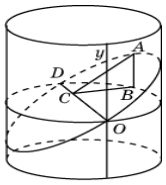
На рис. показано построение точек эллипса, получающегося как сечение боковой поверхности цилиндра плоскостью.

Для этого зададим два сопряженных диаметра *AB*и *CD*. Через точку *A*проведем образующую и выберем на ней какую-нибудь точку *A'*, принадлежащую сечению. Прямая *A'O* пересечет образующую, проходящую через точку *B* в некоторой точке *B'*, также принадлежащую сечению. Возьмем теперь на отрезке *CD* произвольную точку и проведем через нее прямую, параллельную *A'B'*. Ее точки пересечения с образующими цилиндра будут принадлежать сечению.



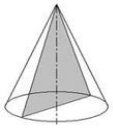
Возьмем прямоугольный лист бумаги и нарисуем на нем оси координат *Ox* и *Oy* параллельно соответствующим сторонам.

Затем свернем этот лист в боковую поверхность прямого кругового цилиндра, радиус основания которого примем за единицу. Ось *Ox* свернется в окружность радиуса 1, а ось *Oy* станет образующей цилиндра.

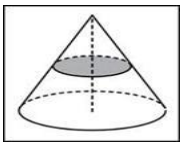


Через диаметр *OD* полученной окружности проведем сечение, составляющее с плоскостью окружности угол в 30^0. В этом случае сечением будет эллипс.

Сечения конуса:

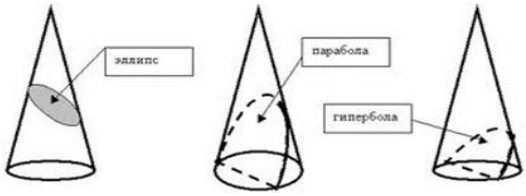


Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называют **осевым сечением**.
(сечением является равнобедренный треугольник)



Сечение плоскостью перпендикулярной оси конуса:

(сечением является круг).



Конические сечения как результат пересечения плоскости с конусом. Возможны три основных типа конических сечений: эллипс, парабола, гипербола

Центр тяжести любого конуса лежит на четверти высоты считая от основания.

Содержание практической работы

1) Нарисуйте цилиндр и плоскость, пересекающую его боковую поверхность по эллипсу.

2)В основании цилиндра круг радиуса 5 см. Боковая поверхность цилиндра пересечена плоскостью. Найдите площадь сечения цилиндра этой плоскостью, если она образует с плоскостью основания угол: а) 30^0; б) 45^0; в) 60^0.

3) Образующая конуса, равна 8 см, наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Найдите площадь осевого сечения конуса.

Контрольные вопросы (ответьте письменно)**:**

1. Запишите определение цилиндра.
2. Запишите определение конуса.
3. Запишите определение усеченного конуса.
4. Запишите определение шара (сферы).
5. Изобразите прямой цилиндр и укажите на рисунке его основные элементы.
6. Изобразите конус и укажите на рисунке его основные элементы.
7. Изобразите усеченный конус и укажите на рисунке основные его элементы.
8. Изобразите шар и укажите на рисунке основные его элементы.
9. Запишите формулы для нахождения площади боковой и полной поверхности цилиндра.
10. Запишите формулы для нахождения площади боковой и полной поверхности конуса.
11. Запишите формулы для нахождения площади боковой и полной поверхности усеченного конуса.
12. Запишите формулу для нахождения площади поверхности шара.
13. Запишите уравнение сферы с центром в точке (укажите любые координаты) и радиуса (укажите любое число).

Практическая работа №68 (1 час)

Тема: Выполнение заданий по теме: «*Площадь поверхности».*
Цель: Проверить знания учащихся по теме «Многогранники», их умения применять полученные знания при решении конкретных задач; выявить проблемы в знаниях учеников по указанной теме.

Содержание практической работы

Вариант I

1) Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее наибольшая боковая грань - квадрат.

2) Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 4 см и образует с плоскостью основания пирамиды угол 45°.

а) Найдите высоту пирамиды.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3) Ребро правильного тетраэдра DABC равно a. Постройте сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра DA параллельно плоскости DBC, и найдите площадь этого сечения.

Вариант II

1) Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник с гипотенузой 13 см и катетом 12 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее наименьшая боковая грань - квадрат.

2) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна √6 см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°.

а) Найдите боковое ребро пирамиды.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

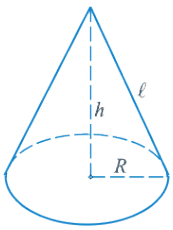
3) Ребро правильного тетраэдра DABC равно a. Постройте сечение тетраэдра, проходящее через середины ребер DA и AB параллельно ребру BC, и найдите площадь этого сечения.

Практическая работа №69 (3 часа)

Тема: *Вычисление площадей и объемов пространственных тел.*
Цель: Сформировать умение решать задачи по теме: «Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка»**.**

Теоретические сведения к практической работе

Конус – тело, полученное объединением всех лучей, исходящих из одной точки (вершины **конуса**) и проходящих через плоскую поверхность.
Круглый **конус** может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.



h – высота конуса, r - радиус основания, l - образующая конуса.

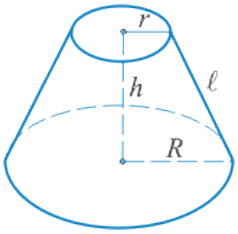
$S_{полн}$ — площадь полной поверхности;

$S_{бок}$ — площадь боковой поверхности;

$$S_{бок} = \pi R \cdot \ell = \frac{1}{2}\pi \cdot d \cdot \ell$$

$$S_{полн} = \pi R(R + \ell)$$

Усеченный конус



$$S_{бок} = \pi \cdot \ell \cdot (R + r) = \frac{1}{2}\pi(D + d)$$

$$S_{полн} = S_{бок} + \pi(R^2 + r^2)$$

Содержание практической работы

Часть 1

1. Найдите площадь боковой поверхности тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетами 4 см и 7 см, вокруг большего катета.
2. Высота конуса равна 5 см, а угол при вершине осевого сечения равен 120□. Найдите объем конуса.
3. Высота конуса равна 12 см, а его образующая равна 13 см. Найдите площадь полной поверхности конуса.
4. Квадрат со стороной 3 см вращается вокруг своей диагонали. Найдите площадь поверхности тела вращения тела вращения.

Часть 2

1. Высота конуса равна 15 см, а радиус основания равен 8 см. Найдите образующую конуса.

2. Найдите высоту конуса, если площадь его основания сечения равна 6 дм^2, а площадь основания равна 8 дм^2.
3. Угол между образующей и осью конуса равен 45^0, образующая равна 6,5 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
4. Площадь осевого сечения конуса равна 0,6 см^2. Высота конуса равна 1,2 см. Вычислите площадь полной поверхности конуса.
5. Прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см вращается вокруг меньшего катета. Вычислите площади боковой и полной поверхностей образованного при этом вращении конуса.
6. Площадь осевого сечения цилиндра равна 10 м^2, площадь основания – 5 м^2. Найдите высоту цилиндра.
7. Площадь боковой поверхности цилиндра равна S. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.
8. Высота цилиндра на 12 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна 288 π см^2. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.
9. Угол между образующей цилиндра и диагональю осевого сечения равен φ, площадь основания цилиндра равна S. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
10. Цилиндр получен вращением квадрата со стороной а, вокруг одной из его сторон. Найдите площадь
1. Осевого сечения цилиндра
2. Боковой поверхности цилиндра
3. Полной поверхности цилиндра

Контрольные вопросы:
1.Что такое конус?
2. Какие основные элементы имеет конус?
3. Как найти площадь поверхности конус и усеченного конуса?

Практическая работа №70 (1 час)

Тема: Выполнение заданий по теме: Числовая последовательность, способы ее задания. Суммирование последовательностей.
Цель: Научиться суммировать числовые последовательности.

Содержание практической работы

Дано:1) $\{x_n\}=\{n\}$; 2) $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$; 3) $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$; 4) $\{x_n\}=\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$; 5) $a_n=\sin n\frac{\pi}{2}$; 6) $a_n=(-1)^n n$; 7) $a_n=\begin{cases}1, & n-\text{нечетное}\\ 0, & n-\text{четное}\end{cases}$;

8) $a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{2}{a_{n-1}}\right),\ a_1=2;\ n\ge 2$; 9) $a_n=\frac{1}{n^2}$; 10) $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$; 11) $a_n=n^n$;

12) $a_n=n^2$; 13) $a_n=n!$; 14) $a_n=\sin\frac{\pi}{n}$;

15) $a_n=\frac{\sin n}{n}$; 16) $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; 17) $a_n=\frac{1}{n!}$.

Надо для каждой последовательности

а) написать ее в виде $a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...,\ a_n,...$;

б) для (1), (2), (3) дать геометрическую интерпретацию;

в) исследовать на монотонность;

г) исследовать на ограниченность;

д) исследовать на сходимость.

Практическая работа №71 (1 час)

Тема: Предел последовательности.

Цель: Сформировать умение находить пределы последовательностей.

Теоретические сведения к практической работе

Пусть существует последовательность действительных чисел $\{a_n\in R: n\ge 1\}$.Число а называется пределом последовательности

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a\in R \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\quad \exists n_0\in N$$

$$\forall n>n_0\quad |a_n-a|<\varepsilon$$

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+6n-5}{10n^3-8n^2+2}$

Решение $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+6n-5}{10n^3-8n^2+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{6}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(10-\frac{8}{n}+\frac{2}{n^3}\right)}=\frac{1}{10}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{12n^3+4n^2-1}$$

Пример 2. Вычислить предел

Решение $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{12n^3+4n^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(12+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}=\frac{0}{12}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6}{7n-8}$$

Пример 3. Вычислить предел

Решение $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6}{7n-8}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\frac{6}{n^2})}{n^2(\frac{7}{n}-\frac{8}{n^2})}=\frac{1}{0}=\infty$

Пример 4. Вычислить предел $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(\sqrt{2n+8}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+8)-(n-1)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+8-n+1}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+9}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\frac{1}{0}=\infty$$

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x\to x_0$ (и пишут $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$), если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$, зависящее от , такое, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Теоремы о пределах:

1. $\lim_{x\to x_0} c=c$ (c=const).

2. Если $\lim_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=B,$ то:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0}\varphi(x)}=\frac{A}{B},\quad (B\neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Второй замечательный предел (число e = 2,718…):

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+\mathrm{x})}{x}=\log_a e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x\cdot 8}{6\cdot 8x}=\frac{5\cdot 8}{6}=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}$

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\ln(1+5x)}{5x}=5$

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}\overset{\left[1^{\infty}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5x\cdot\frac{1}{3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(5x\cdot\frac{1}{3x}\right)}=e^{\frac{5}{3}}$

Пример 8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x$

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1+3}{x^2+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^{\frac{x^2+1}{3}\cdot\frac{3}{x^2+1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2+1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+1}}=e^0=1$$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x=x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x=x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c=\text{const}$, $c\neq 0$, $c\neq\infty$, то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$\frac{0}{c}\to 0$; $\frac{c}{0}\to\infty$; $\frac{\infty}{c}\to\infty$; $c\cdot\infty\to\infty$; $c\cdot 0\to 0$; $a^\infty\to 0$, если $0<a<1$; $a^\infty\to\infty$, если $a>1$.

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right);\ \left(\frac{0}{0}\right);\ (0\cdot\infty);\ (\infty-\infty);\ (1^\infty);\ (\infty^0);\ (0^0).$$

Пример 9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+15}{10x^2-4}$

Решение $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+15}{10x^2-4}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2\cdot 1^3+15}{10\cdot 1^2-4}=\frac{2+15}{10-4}=\frac{17}{6}$

Пример 10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

Решение $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x+4)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(4+4)}{(4-1)}=\frac{8}{3}$

Пример 11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}$

Решение

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to5}\frac{\left(\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}\right)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{\left(\left(\sqrt{2x+8}\right)^2-\left(\sqrt{23-x}\right)^2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{\left((2x+8)-(23-x)\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{(2x+8-23+x)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{(3x-15)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{3(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{3}{\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\frac{3}{\left(\sqrt{2\cdot5+8}+\sqrt{23-5}\right)}=\frac{3}{\left(\sqrt{18}+\sqrt{18}\right)}=\frac{3}{2\sqrt{18}}=\frac{3}{2\cdot3\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1\cdot2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{4\cdot2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить пределы последовательностей:

$1)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+5}$ $\quad 2)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-2n}{n+6}$ $\quad 3)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n+3}{1+2n}$

$4)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+16}{9n}$ $\quad 5)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$ $\quad 6)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n-1)^2-(n+1)^2}$

$7)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$ $\quad 8)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+16n}$ $\quad 9)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n-7}-\sqrt{n+2}\right)$

Задание 2. Вычислить пределы функций:

$1)\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4+2x^2-3x}{x^3-3x^2+x}$ $\quad 2)\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+x}$ $\quad 3)\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2}$

$4)\lim\limits_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)}{\sqrt{x}-2}$ $\quad 5)\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ $\quad 6)\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$

$7)\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}$ $\quad 8)\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3-15x^2+x}{18x^2+15x}$ $\quad 9)\lim\limits_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{4x-7}-\sqrt{x+2}\right)}{x-2}$

Задание 3. Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы:

$1)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)^{x^2+1}$ $\quad 2)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$ $\quad 3)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

$4)\lim\limits_{x\to0}\left(1+10x^2\right)^{x^3\cdot\frac{1}{x}}$ $\quad 5)\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$ $\quad 6)\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2-5x}{\sin 4x}$

$7)\lim\limits_{x\to0}\frac{tg3x}{tgx}$ $\quad 8)\lim\limits_{x\to0}\frac{9\ln(1-2x)}{4arctg3x}$ $\quad 9)\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 7x}{\sin x\cdot x^2}$

Практическая работа №72 (1 час)

Тема: Выполнение заданий на тему: «Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия».

Теоретические сведения к практической работе

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия — это прогрессия, у которой |q| < 1. Для неё определяется понятие суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии как число, к которому неограниченно приближается сумма n первых членов рассматриваемой прогрессии при неограниченном возрастании числа n.

Найдем сумму всех членов геометрической прогрессии, т.е.

$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}$

$S_n = \frac{b_1\,(g^n-1)}{g-1}$

$S_n = \frac{1\left((\frac{1}{2})^n-1\right)}{\frac{1}{2}-1} = -2 * ((\frac{1}{2})^n - 1) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \longrightarrow 2$, т.к. при $n \to \infty$ вычитаемое стремится к нулю.

Ответ: ученик не сможет дойти до стола учителя.

Вывод формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии при | g|<1.

$S_n = \frac{b_1\,(g^n-1)}{g-1}$

$S_n = \frac{b_1\,(g^n-1)}{g-1} = \frac{b_1}{g-1}(1-g^n)$

Если $|g|<1$, то при неограниченном увеличении n множитель g^n стремится к нулю, а значит разность $1-g^n = 1-0 = 1$, т.е. стремится к единице. Поэтому при неограниченном увеличении n сумма S_n стремится к числу $\frac{b_1}{g-1}$.

Число $\frac{b_1}{g-1}$ называют суммой бесконечной геометрической прогрессии при

$|g|<1$.

Тогда $S_n = \frac{b_1}{g-1}$.

Заметим, что если | g |>1, то сумма n первых членов геометрической прогрессии при неограниченном увеличении n не стремится ни к какому числу. Бесконечная геометрическая прогрессия имеет сумму только при | g |<1.

Содержание практической работы

1. Дана геометрическая прогрессия. вычислите сумму 2 первых членов, если b3=27 ,q=3.

2.Дана геометрическая прогрессия, вычислите b3,если b1=-4,q=1/2.

3.Дана геометрическая прогрессия, вычислите b4,если b1=-2,q=-1/2.

4. Дано: 7,(12). Найти: представить в виде обыкновенной дроби.

Практическая работа №73 (1 час)

Тема: Вычисление производных основных элементарных функций. Вычисление производной от суммы, разности.

Цель: Обобщить и систематизировать знания по теме «Производная»; закрепить умения использовать полученные знания для нахождения производной функции.

Теоретические сведения к практической работе

Производной функцией $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю: $y'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.		
Основные правила и формулы дифференцирования элементарных функций:		
$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$	$(\sin x)'=\cos x$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$	$(\cos x)'=-\sin x$	$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$
$(e^x)'=e^x$	$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$	$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$c'=0$, $x'=1$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(u\pm v)'=u'\pm v'$

$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$	$(\frac{u}{v})' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$
Пусть функция $y = y(u)$, $u = u(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда сложная функция $y = y(u(x))$ также дифференцируемая функция, причем: $y'_x = y_{u'}\cdot u'_x$ или $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$. Это правило распространяется для любого конечного числа дифференцируемых функций: производная сложной функции равна произведению производных функций, ее составляющих.	

Содержание практической работы

Вариант 1

Задание 1. Найдите производную функции:

1) $y = 12x^2 - \sqrt{x}$
2) $y = 3\sin x + 4x^3$
3) $y = \frac{3}{x} - 4\cos x$
4) $y = 3x^5 - 8x^{10}$
5) $y = x^3 + 4x^2 - \frac{5}{x^2}$
6) $y = x(x^3 + 4x^2 - 1)$
7) $y = \frac{x^5 + 4x^4 - 1}{x^2}$
8) $y = x\sin x$
9) $y = (x^2 + 4x - 1)^6$
10) $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$

Задание 2.
Решить уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = x - \cos x$

Вариант 2

Задание 1. Найдите производную функции:

1) $y = 2x^3 - 4\sqrt{x}$

2) $y = 2\sin x + 3x^3$

3) $y = \frac{5}{x} - 7\cos x$

4) $y = 3x^{11} - 5x^4$

5) $y = x^4 - 6x + \frac{3}{x^2}$

6) $y = (x^3 - 5x + 1)^5$

7) $y = \sin(4x - \frac{\pi}{4})$

Задание 2.

Решить уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

Практическая работа №74 (2 часа)

Тема: Выполнение заданий по теме: Правила и формулы дифференцирования

Цель: Обобщить и систематизировать знания по теме «Производная»; закрепить умения использовать полученные знания для нахождения производной функции.

Содержание практической работы

Найдите производные функций:

1) $y = x(x^2 - 5x + 1)$

2) $y = \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x^2}$

3) $y = x\cos x$

4) $f(x) = \cos x \cdot \sqrt[4]{x}$

5) $f(x) = \frac{4^x}{3\sin x}$

6) $f(x) = (x^2 - 1)(x^4 + 2)$

7) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x+1}$

8) $f(x)=\dfrac{\ln x}{2x^4}-e^2$

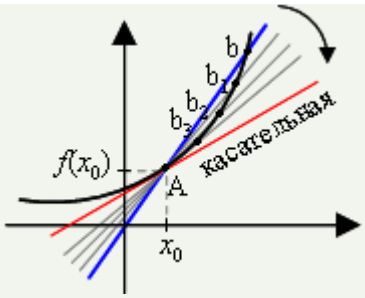
9) $f(x)=x^2\cdot\sin x$

10) Решить уравнение: $f'(x)=0$, если $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x+2}$.

Практическая работа №75 (1 час)

Тема: Выполнение заданий по теме: Уравнение касательной в общем виде.
Цель: Научиться находить угловой коэффициент касательной к графику функции в заданной точке; составлять уравнения касательных к графику функции по заданным условиям.

Теоретические сведения к практической работе

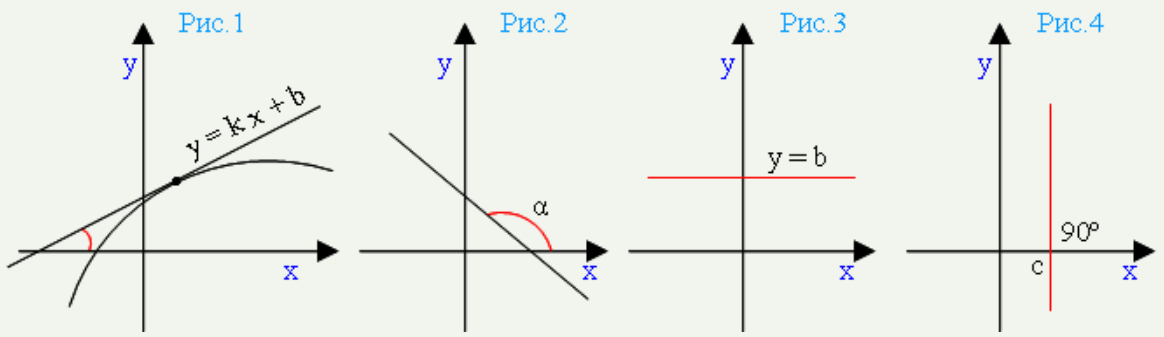


<u>Строгое определение касательной:</u>
Касательная к графику функции f, дифференцируемой в точке x_o, - это прямая, проходящая через точку $(x_o; f(x_o))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_o)$.

Угловой коэффициент имеет прямая вида $y = kx + b$. Коэффициент k и является **угловым коэффициентом** этой прямой.
Угловой коэффициент равен тангенсу острого угла, образуемого этой прямой с осью абсцисс:

$$\boldsymbol{k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_o).}$$

Здесь угол α – это угол между прямой $y = kx + b$ и положительным (то есть против часовой стрелки) направлением оси абсцисс. Он называется **углом наклона прямой.**



Если угол наклона прямой $y = kx + b$ острый, то угловой коэффициент является положительным числом. График возрастает (рис.1).

Если угол наклона прямой $y = kx + b$ тупой, то угловой коэффициент является отрицательным числом. График убывает (рис.2).

Если прямая параллельна оси абсцисс, то угол наклона прямой равен нулю. В этом случае угловой коэффициент прямой тоже равен нулю (так как тангенс нуля есть ноль). Уравнение прямой будет иметь вид y = b (рис.3).

Если угол наклона прямой равен 90º (π/2), то есть она перпендикулярна оси абсцисс, то прямая задается равенством $x = c$, где c – некоторое действительное число (рис.4).

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_o:

$$y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

Алгоритм решения уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$:

1. Вычислить $f(x_o)$.
2. Вычислить производные $f'(x)$ и $f'(x_o)$.
3. Внести найденные числа x_o, $f(x_o)$, $f'(x_o)$ в уравнение касательной и решить его.

Содержание практической работы

Задание №1. Составьте уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке x_0.

1	$y = x - 3x^2, x_0 = 2$	**11**	$y = 5x - x^2, x_0 = -2$
2	$y = 2x - x^2, x_0 = 1$	**12**	$y = 6 + 2x - x^3, x_0 = 1$
3	$y = 3x^3 - 4x + x^2, x_0 = -1$	**13**	$y = 3x^4 - 4 + 2x^2, x_0 = -1$
4	$y = x^2 - 2x - 1, x_0 = 3$	**14**	$y = 6x^2 - x + 5, x_0 = 3$
5	$y = -2x^2 + x, x_0 = -2$	**15**	$y = x^2 + 2x - 1, x_0 = -3$

6	$y = 7x - 5 - 2x^3, x_0 = 1$	**16**	$y = 7 - 5x^2 - 2x^3, x_0 = 1$
7	$y = 2x - 3x^2 + x^4, x_0 = -1$	**17**	$y = 2 + 3x^2 + x^4, x_0 = 1$
8	$y = \frac{1}{3}x^3 - 3, x_0 = 2$	**18**	$y = 5x^3 - 3x, x_0 = 2$
9	$y = 0{,}5x^2 - 5x, x_0 = -2$	**19**	$y = 0{,}5x^4 - 5x^2x, x_0 = -1$
10	$y = \frac{1}{4}x^4 - 3x, x_0 = 1$	**20**	$y = \frac{1}{8}x^4 - 3, x_0 = 1$
Задание №2. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке x_0.			
1	$y=x^3+4x^2-11$, $x_0=3$	**11**	$y=3-x-2tgx$, $x_0=0$
2	$y=6x-tgx$, $x_0=0$	**12**	$y=6x+4sinx$, $x_0=\frac{\pi}{3}$
3	$y=3e^x+2{,}5x$, $x_0=0$	**13**	$y=9-3x^2-2x^3$, $x_0=-1$
4	$y=2x+7lnx$, $x_0=14$	**14**	$y=5x+4x^2+3e^x$, $x_0=0$
5	$y = 4\sqrt{x} - 3x + 1, x_0 = 1$	**15**	$y=6x-4cosx$, $x_0=\frac{\pi}{6}$
6	$y = \frac{1}{3}x^3 - 7x + 1$, $x_0=6$	**16**	$y=4x-3lnx$, $x_0=6$
7	$y=2x+ctgx$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$	**17**	$y = \frac{2}{3}x^3 - 7x^2$, $x_0=-2$
8	$y=3x-x^2$, $x_0=1$	**18**	$y=6sinx-3x$, $x_0=0$
9	$y=4x^2-2e^x$, $x_0=0$	**19**	$y = 2\sqrt{x} - 3x^2, x_0 = 4$
10	$y=2-5x-lnx$, $x_0=1$	**20**	$y=9x-4x^3$, $x_0=1$
Задание №3. Прямая параллельна касательной к графику функции $y=f(x)$. Найдите абсциссу точки касания.			
1	$y = 4x+8, y = x^2-5x+7$	**11**	$y=5x+3$, $y = x^2-7x+2$
2	$y = 7x+11, y = x^2+8x+6$	**12**	$y=4-3x$, $y = 2x^2-x-12$
3	$y = 3x+5, y = x^2+7x-5$	**13**	$y=x+1$, $y = x^2-5x+3$
4	$y = -4x-11, y = x^2-5x+7$	**14**	$y=-5x+2$, $y = 3x^2+7x+1$
5	$y = x+9, y = x^2+7x-5$	**15**	$y=2-5x$, $y = x^2-6x+2$
6	$y = -3x+5$, $y = 2x^2 -2x-1$	**16**	$y=-x+1$, $y = -x^2+4x$
7	$y = 3x - 2$, $y = -x^2 -12x+5$	**17**	$y=5x$, $y = 2x^2-8x-3$
8	$y = -x+5$, $y = x^2 -7x-1$	**18**	$y=4-x$, $y = x^2+2$
9	$y = -6x-2$, $y = 3x^2 -12x+7$	**19**	$y=12x$, $y = 3x^2-1$
10	$y = -3x-5$, $y = 2x^2 -2x-1$	**20**	$y=-3x -2$, $y =2 x^2-11x+2$

Практическая работа №76, 77 (2 часа)

Тема: Выполнение тренировочных упражнений по теме «Производная».
Цель: Сформировать умение находить производные функций, заданных в явном, логарифмическом и параметрическом виде, находить производные сложных функций, знать геометрический смысл производной, применять правило Лопиталя для нахождения пределов.

Теоретические сведения к практической работе

Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

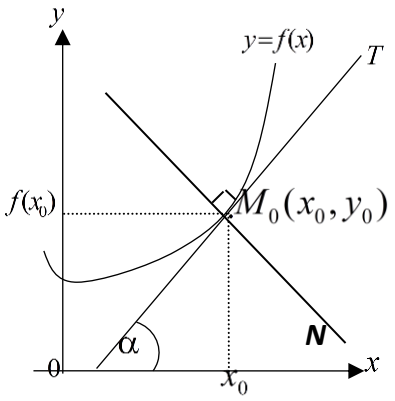
$$y' = f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Обозначения производной в точке x_0:

$$f'(x_0), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \left.y'_x\right|_{x_0}, \quad y'(x_0) \text{ и другие.}$$

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в этой точке* (или на промежутке X).

Процесс отыскания производной называется *дифференцированием*.



Геометрический смысл производной.

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ($K = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$).

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 (прямая M_0T) имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad (2)$$

а уравнение нормали (M_0N):

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (3)$$

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции

I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	**VI**	Производная сложной функции $y = f[u(x)],\ y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	**VII**	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}.$
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u',\quad c = \text{const}$		
IV	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},\ (v(x) \neq 0)$	**VIII**	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \dfrac{1}{y'_x},\ (y'_x \neq 0).$
V	$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2},\ \begin{matrix} c = \text{const} \\ (v(x) \neq 0) \end{matrix}$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ пп	c=const, x — независимая переменная, $u = u(x)$ — дифференцируемая функция		
1	$C' = 0$	**9**	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2	$x' = 1$	**10**	$(\text{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
3	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	**11**	$(\text{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	**12**	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\ \lvert u \rvert < 1$
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	**13**	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\ \lvert u \rvert < 1$
6	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}\ \ (u > 0)$	**14**	$(\text{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
7	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}\ \ (u > 0)$	**15**	$(\text{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
8	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$		

Производной n-го порядка называется производная от производной (n–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка $y''' = (y'')'$ или $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Пример 1. Найти производные функций:

а) $y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$; *б*) $s = (e^t - 2\ln t)\sin t$; *в*) $u = \operatorname{ctg}^3\dfrac{v}{3}$; *г*) $z = \dfrac{\operatorname{arctg} 2t}{1+4t^2}$.

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' =$$

$$= 3\cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть *t*, т. е. *t*=1, получим:

$$s = [(e^t - 2\ln t)\sin t]' = (e^t - 2\ln t)'\sin t + (e^t - 2\ln t)(\sin t)' =$$

$$((e^t)' - 2(\ln t)')\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t = \left(e^t - \frac{2}{t}\right)\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть *v*, т. е. *v*=1; используя формулу (3), получим:

$$u' = \left[\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right] = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)' = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) =$$

$$= 2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) = -\frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что *t*=1, получим:

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}\right)' = \frac{(\operatorname{arctg}2t)'(1+4t^2) - (\operatorname{arctg}2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2) - \operatorname{arctg}2t(0+4\cdot 2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2-8t\operatorname{arctg}2t}{(1+4t^2)^2}.$$

Пример 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=\sqrt{x^2-3}$ в точке с абсциссой x_0=2.

Используем уравнения касательной (2) и нормали (3):

1) $y(x_0) = y(2) = \sqrt{2^2-3} = 1;$

2) $y'(x) = ((x^2-3)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}(x^2-3)' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}};$

$$y'(x_0) = y'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2-3}} = 2.$$

Подставим x_0, $y(x_0)$, $y'(x_0)$ в уравнения и получим: $y = 1+2(x-2)$,

или $2x-y-3=0$ — уравнение касательной.

$y = 1-\frac{1}{2}(x-2)$, или $x+2y-4=0$ — уравнение нормали.

Пример 3. Найти производную y'_x, если функция задана парамет-рически:

$$\begin{cases} x = \ln(5-2t) \\ y = \operatorname{arctg}(5-2t). \end{cases}$$

Используем правило VII $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

$$\begin{cases} x'_t = \frac{(5-2t)'}{5-2t} = \frac{-2}{5-2t} \\ y'_t = \frac{(5-2t)'}{1+(5-2t)^2} = \frac{-2}{1+(5-2t)^2}. \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{-2}{1+(5-2t)^2} : \frac{-2}{5-2t} = \frac{5-2t}{1+(5-2t)^2} = \frac{5-2t}{4t^2-20t+26}.$$

Пример 4. Найти дифференциалы функций:

а) $y = x+\cos 2x$; *б*) $u = 3+e^{-x}$; *в*) $s = \ln 3t$.

Для дифференциала функции $y = y(x)$ справедлива формула $dy = y'(x)dx$, т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной.

Решение.

а) $dy = (x + \cos 2x)'dx = (1 - \sin 2x \cdot 2)dx = (1 - 2\sin 2x)dx.$

б) $du = (3 + e^{-x})'dx = e^{-x}(-1)dx = -e^{-x}dx.$

в) $ds = (\ln 3t)'dt = \dfrac{(3t)'}{3t}dt = \dfrac{3}{3t}dt = \dfrac{1}{t}dt.$

Пример 5. Найти производную второго порядка функции $y = x^2 \ln x.$

Решение. $y'' = (y')'$, поэтому найдём производную первого порядка, а затем второго.

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

$$y'' = (x(2\ln x + 1))' = x'(2\ln x + 1) + x(2\ln x + 1)' = 2\ln x + 1 + x\frac{2}{x} = 2\ln x + 3.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = x^x$ логарифмическим дифференцированием

$$y = x^x$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

$$(\ln y)' = (x \cdot \ln x)'$$

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$y' = y(\ln x + 1)$$

$$y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

Правило Лопиталя. Предел отношения двух б.м. $\left(\frac{0}{0}\right)$ или б.б. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (5)$$

Чтобы использовать правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей других типов, выражение под знаком предела следует преобразовать элементарными способами так, чтобы получить неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и затем использовать формулу (5).

Пример 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя или элементарные способы раскрытия неопределённостей:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6}$; *б*) $\lim\limits_{x\to-7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14}$;

Решение.

а) Подставляя в функцию вместо x предельное значение ∞, определим предел числителя и знаменателя.

$$\lim_{x\to\infty}(4x^3+2x-3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(4+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)=\infty\cdot 4=\infty,\ \text{т. к. } \frac{2}{x^2}\to 0,\ \frac{3}{x^3}\to 0.$$

Аналогично: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+6)=\infty$.

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^3+2x-3)'}{(x^2+6)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+2}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(12x^2+2)'}{(2x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{2}=\lim_{x\to\infty}12x=\infty.$$

б) $$\lim_{x\to-7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14}=\lim_{x\to-7}\frac{2(-7)^2+15(-7)+7}{(-7)^2+5(-7)-14}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-7}\frac{(2x^2+15x+7)'}{(x^2+5x-14)'}=\lim_{x\to-7}\frac{4x+15}{2x+5}=\lim_{x\to-7}\frac{4(-7)+15}{2(-7)+5}=\frac{-13}{-9}=\frac{13}{9}.$$

Содержание практической работы

Задание 1. Найти производные 1-го порядка данных функций

1) $а)\ y=3x^3-\dfrac{5}{x^7}-\sqrt[4]{x^5};\ б)\ s=(1+t^2)(2-3\mathrm{arcctg}t);\ в)\ u=\ln^3\dfrac{V}{2};\ г)\ z=\dfrac{5-\sin 3t}{e^{4t}}.$

2) $а)\ y=5x-\dfrac{2}{x^4}+3\sqrt[5]{x^6};\ б)\ s=(4-3\ln t)(5+2\sin t);\ в)\ u=\sin^4(2V+3);\ г)\ z=\dfrac{\sin(2-t)}{2-\ln 3t}.$ 3)

$а)\ y=7x^2+\dfrac{4}{x^6}-\sqrt[5]{x^2};\quad б)\ s=(3-\cos t)(5+6\sin t);\ в)\ u=\sqrt[3]{1-4V^2};\ г)\ z=\dfrac{t^3-e^{3t}}{\arccos 2t}.$

4) $а)\ y=5x^2+\dfrac{3}{x^4}-\sqrt[6]{x^7};\ б)\ s=(3t^3-4)(t-2\cos t);\ в)\ u=\ln^2(5V-3);\ г)\ z=\dfrac{\ln(4-5t)}{\sin t}.$

5) $а)\ y=x^5-\dfrac{2}{x^3}+2\sqrt[7]{x^5};\ б)\ s=t^4(4+\mathrm{arctg}t);\ в)\ u=\cos^3(3V+1);\ г)\ z=\dfrac{t-\arcsin 5t}{e^{-t}}.$

6) $а)\ y=x^4+\dfrac{1}{x}-2\sqrt[3]{x};\quad б)\ s=(3+\mathrm{tg}t)(1-4\mathrm{ctg}t);\ в)\ u=tg^4(3V+2);\ г)\ z=\dfrac{\mathrm{arctg}2t}{1+4t^2}.$

Задание 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

1) $\dfrac{x^2-3}{x},\ x_0=1.$

2) $\sqrt{5-x^2},\ x_0=2.$

3) $\dfrac{x^2+3x}{3},\ x_0=-1.$

4) $\sqrt{x}+2x,\ x_0=9.$

5) $\dfrac{x^2}{x-2},\ x_0=1.$

6) $\sqrt{1+3x},\ x_0=1.$

Задание 3. Найти производную y'_x функции $y=y(x)$, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\cos t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=\cos(2t+6) \\ y=\sin(2t+6) \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=(1-t)^2 \\ y=\cos(t-1) \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \mathrm{tg}t \\ y = t^2 - 8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = e^{4t} \\ y = (1-4t)^2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = c\mathrm{tg}t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$

Задание 4. Найти дифференциалы функций:

1) $y = \sin 2x + 5;$

2) $y = \ln x - x^3;$

3) $y = 4 + 8\sin x;$

4) $y = 2x - 1.$

5) $y = 1 - \cos x;$

6) $y = 10 - 3x^2$

Задание 5. Найти производную второго порядка функции y=f(x).

1) $y = \ln x + 9$

2) $y = \cos x - \ln x$

3) $y = \mathrm{sinx} + x^4$

4) $y = x^2 + \sin x$

5) $y = x + \ln x$

6) $y = 3e^x + 2x$

Задание 6. Найти производную функции логарифмическим дифференцированием

1) $y = (\sin x)^{\cos x}$

2) $y = (\cos x)^x$

3) $y = x^{\ln x}$

4) $y = (\sin x)^{\ln x}$

5) $y = x^{\cos x}$

6) $y = (tgx)^{\ln x}$

Задание 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{x^2-5x+4}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1}{\operatorname{arctg} x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{1-\cos x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2-5x+1}{1-3x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\sin x}-1}{\sin 3x}$.

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

Практическая работа №80 (1 час)

Тема: Решение задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.
Цель: Сформировать умение нахождить наибольшее и наименьшее значения функции.

Содержание практической работы

1. $y = x^3 - 27x$ на отрезке [0; 4].
2. $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке [– 2; 0]
3. $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ на отрезке [1; 4]
4. $y=\frac{x^3}{3}-9x-7$ на отрезке [-3; 3]
5. $y=\frac{x^2+25}{x}$ на отрезке [-10; 1]

6.(дополнительное) $y=x+\dfrac{36}{x}$ на отрезке [1; 9]

7. $y = 7\cos x + 16x - 2$ на отрезке $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\,0\right]$.

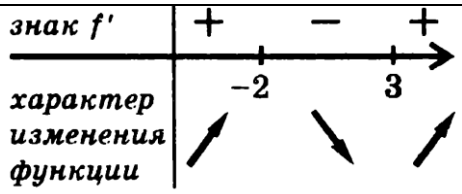
8. $y = 12\cos x + 6\sqrt{3}\,x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Практическая работа №81 (2 часа)

Тема: Построение графиков функций с помощью производной.
Цель: Закрепить и обобщить умения и навыки исследования функций и построения графиков с помощью производной.

Теоретические сведения к практической работе

Схема применения производной для нахождения интервалов монотонности и экстремумов

Этапы	**Пример** для функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$
Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.	Обл. определения: R Функция непрерывна во всей обл. определения
Найти производную $f'(x)$.	$f'(x)=6x^2-6x-36$
Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная функции равна нулю или не существует.	$f'(x)=0,\ 6x^2-6x-36=0,$ $x_1=-2,\ x_2=3$
В каждом из интервалов, на которые область определения разбивается критическими точками, определить знак производной и характер изменения функции (с помощью достаточных условий монотонности).	
Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.	$x=-2$ -точка максимума ($x_{max}=-2$) $x=3$-точка минимума ($x_{min}=3$)
Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.	$f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -2)$ и при $x \in (3; \infty)$; $f(x)$ убывает при $x \in (-2; 3)$; $x_{max}=-2,\ \ y_{max} = f(-2) = 49$; $x_{min}=3,\ y_{min} = f(3)= -76$

Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке

Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах.

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке

Этапы	**Пример** для функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$ на отрезке [0; 4]
Найти производную $f'(x)$.	$f'(x)=6x^2-6x-36$
Найти на данном отрезке критические точки, т.е. точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует.	$f'(x) = 0$ при $x = -2$ и при $x = 3$. Отрезку [0; 4] принадлежит только одна критическая точка: $x = 3$.
Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$f(0)=5$ $f(3)=-76$ $f(4)=-59$
Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее.	$\max_{[0;4]} f(x) = f(0) = 5$ $\min_{[0;4]} f(x) = f(3) = -76$

Содержание практической работы

1 ВАРИАНТ

1. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$.

2. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3$ на отрезке [–1; 4].

3. Исследовать функцию $y= -x^3+4x^2-4x$ и построить ее график.

2 ВАРИАНТ

1. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 2$.

2. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2$ на отрезке [–2; 1].

3. Исследовать функцию $y= x^3+6x^2+9x$ и построить ее график.

Практическая работа №82,83 (2 часа)

Тема: Выполнение заданий по теме: Правила нахождения первообразных. Вычисление интегралов.

Цель: Сформировать умение вычислять неопределенные и определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

Теоретические сведения к практической работе

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a,b), если $F'(x)=f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x)=F(x)+C$, где C — const .

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $F'(x)=f(x)$, C — const.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$; $\quad d\int f(x)dx=f(x)dx$;
2. $\int dF(x)=F(x)+C$;
3. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$, $\quad k$ — const;
4. $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

Таблица основных интегралов

1. $\int 0du=C$; $\quad C=\text{const}$;
2. $\int du=u+C$;
3. $\int u^{\alpha}du=\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, $\quad \alpha\neq-1$;

3а. $\int\dfrac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C$;

4. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$ 5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$

6. $\int e^u du = e^u + C;$ 7. $\int \cos u\, du = \sin u + C;$

8. $\int \sin u\, du = -\cos u + C;$ 9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C;$

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C;$ 11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$ 13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{u}{a} + C;$

14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C;$ 15. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg} \frac{u}{2}\right| + C;$

16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$ 17. $\int \mathrm{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C;$

18. $\int \mathrm{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Пример 1. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы (результат интегрирования проверить дифференцированием):

$$а)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5}\right)dx; \qquad б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2} + 3\cdot 5^x + \frac{16-x^2}{4+x}\right)dx.$$

Решение.

$$а)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5}\right)dx = \int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^4} + 2x^{5/6}\right)dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы}\\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные}\\ \text{множители вынесем за знак интегралов}\end{array}\right\} =$$

$$= 5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}} - 3\int\frac{dx}{x} - \int x^{-4}dx + 2\int x^{5/6}dx = \left\{\begin{array}{l}\text{используем табличные}\\ \text{интегралы 12, 4, 3}\end{array}\right\} =$$

$$= 5\ln\left|x + \sqrt{x^2+7}\right| - 3\ln|x| - \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + 2\cdot\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1} + C =$$

$$= 5\ln\left|x + \sqrt{x^2+7}\right| - 3\ln|x| + \frac{1}{3x^3} + \frac{12}{11}x^{11/6} + C.$$

Проверка:

$$\left(5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C\right)'=5\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|\right)'-$$

$$-3\left(\ln|x|\right)'+\frac{1}{3}\left(x^{-3}\right)'+\frac{12}{11}\left(x^{11/6}\right)'+C'=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{4, 3, 1 таблицы производных}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)'}{x+\sqrt{x^2+7}}-3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}(-3)x^{-3-1}+\frac{12}{11}\cdot\frac{11}{6}\cdot x^{11/6-1}=5\cdot\frac{1+\frac{\left(x^2+7\right)'}{2\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}=5\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=5\frac{\sqrt{x^2+7}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\text{ — верно.}$$

б) $$\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx=5\int\frac{dx}{11\left(x^2+\frac{2}{11}\right)}+3\int5^x dx+$$

$$+\int\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}dx=\frac{5}{11}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{2}{11}}\right)^2}+3\int5^x dx+4\int dx-\int x\,dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{13, 5, 2, 3 таблицы интегралов}\end{matrix}\right\}=\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{11}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{11}}}+3\cdot\frac{5^x}{\ln5}+$$

$$+4x-\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln5}+4x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln5}+4x-\frac{1}{2}x^2+C\right)'=\frac{5}{\sqrt{22}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'+$$

$$+\frac{3}{\ln5}\left(5^x\right)'+4x'-\frac{1}{2}\left(x^2\right)'+C'=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы 14, 5, 2, 3, 1}\\ \text{таблицы производных}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{22}}\frac{\left(\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'}{1+\frac{11}{2}x^2}+\frac{3}{\ln5}\cdot5^x\ln5+4\cdot1-\frac{1}{2}2x^{2-1}=\frac{5}{\sqrt{22}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{\frac{2+11x^2}{2}}+$$

$$+3\cdot5^x+4-x=\frac{5}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{2}}\frac{\sqrt{11}\cdot2}{\sqrt{2}\left(2+11x^2\right)}+3\cdot5^x+\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}=$$

$$=\frac{5}{2+11x^2}+3\cdot5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\text{ — верно.}$$

Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x=\varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt=F(t)+C,$ то $\int f(x)dx=F(\psi(x))+C,$ где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x=\varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx=\varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t=\psi(x)$.

Пример 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

а) $\int\cos 4xdx$; *б)* $\int e^{9x+1}dx$; *в)* $\int x(2-x^2)^5dx$

Решение:

$$а)\ \int\cos 4xdx=\left|\begin{array}{c} t=4x \\ dt=(4x)'=4dx \\ dx=\dfrac{dt}{4}\end{array}\right|=\int\cos t\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\int\cos tdt=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 7}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{1}{4}\sin 4x+C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1}dx=\left|\begin{array}{c} t=9x+1 \\ dt=(9x+1)'=9dx \\ dx=\dfrac{dt}{9}\end{array}\right|=\int e^t\frac{dt}{9}=\frac{1}{9}\int e^tdt=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 6}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{9}e^t+C=\frac{1}{9}e^{9x+1}+C.$$

$$в)\int x(2-x^2)^5dx=\left|\begin{array}{c} t=2-x^2 \\ dt=(2-x^2)'=-2xdx \\ xdx=\dfrac{dt}{-2}\end{array}\right|=\int t^5\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int t^5dt=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 3}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{t^6}{6}+C=-\frac{1}{12}(2-x^2)^6+C.$$

Интегрирование по частям. Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U=U(x)$ и $V=V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int UdV=UV-\int VdU, \qquad (3)$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Таблица 1

Вид интеграла	$U\to dU$	$dV\to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n=1,2,...$	$U=P_n(x)\to$ $\to dU=P_n'(x)dx$	$dV=\sin kx\,dx\to V=-\frac{1}{k}\cos kx$ $dV=\cos kx\,dx\to V=\frac{1}{k}\sin kx$ $dV=e^{kx}dx\to V=\frac{1}{k}e^{kx}$

Вид интеграла	$U\to dU$	$dV\to V$
$\int \ln kx\,P_n(x)dx$ $\int \arcsin kx\,P_n(x)dx$	$U=\ln kx\to dU=\frac{dx}{x}$ $U=\arcsin kx\to dU=\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	$dV=P_n(x)dx\to$ $\to V=\int P_n(x)dx$

$\int \arccos kx\, P_n(x)dx$	$U = \arccos kx \to dU = -\dfrac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \operatorname{arctg} kx\, P_n(x)dx$	$U = \operatorname{arctg} kx \to dU = \dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$\int \operatorname{arcctg} kx\, P_n(x)dx$	$U = \operatorname{arcctg} kx \to dU = -\dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$n = 0,1,2,...$		

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, где $a_0 \neq 0$.

Пример 3. Проинтегрировать по частям.

а) $\int (3x-1)\sin 2xdx$; *б*) $\int (1+2x)\ln xdx$.

Решение.

$$\text{à)}\ \int (3x-1)\sin 2xdx = \begin{vmatrix} U = 3x-1 \to dU = 3dx \\ dV = \sin 2xdx \to V = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{vmatrix} = (3x-1)(-\frac{\cos 2x}{2}) + \int \frac{\cos 2x}{2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{2}\int \cos 2xdx = -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C.$$

$$\text{б)}\ \int (1+2x)\ln xdx = \begin{vmatrix} U = \ln x \to dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = (1+2x)dx \to \\ V = \int (1+2x)dx = x + x^2 \end{vmatrix} = \ln x(x+x^2) - \int (x+x^2)\frac{dx}{x} =$$

$$= \ln x(x+x^2) - \int (1+x)dx = \ln x(x+x^2) - x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Определенный интеграл, его вычисление и свойства

Определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (5)$$

где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

Формула (5) называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

Свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$ 2) $\int_a^a f(x)dx = 0;$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

4) $\int_a^b \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$

5) $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx,\ C - \text{const};$

6) Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx;$

7) Если $m \le f(x) \le M$ для всех $x \in [a,b]$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной по формуле (1) необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dx, \qquad (6)$$

где $\alpha = \psi(a),\ \beta = \psi(b),\ t = \psi(x)$ — обратная к $x = \varphi(t)$ функция.

Формула интегрирования по частям (3) приобретает вид:

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU, \qquad (7)$$

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 \left(x^2 - 16x + 3\right)dx$

Решение.

$$\int_1^3 \left(x^2-16x+3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-16\cdot\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_1^3=\left(\frac{x^3}{3}-8x^2+3x\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=\left(\frac{3^3}{3}-8\cdot 3^2+3\cdot 3\right)-\left(\frac{1^3}{3}-8\cdot 1^2+3\cdot 1\right)=\left(\frac{27}{3}-72+9\right)-\left(\frac{1}{3}-8+3\right)=$$

$$=(9-63)-\left(\frac{1}{3}-5\right)=-54-\frac{1}{3}+5=-49-\frac{1}{3}=-49\frac{1}{3}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить интегралы.

1) $\int\left(\frac{7}{x^2+16}-\frac{x^4+5}{x^5}+3\sqrt{x}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{5}{5x^2+5}+7^x-\frac{\sin 2x}{\cos x}\right)dx$

2) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}}-\frac{2x^2+10}{x}+4\sqrt[6]{x^5}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{2}{2x^2+2}+2^x-\frac{x^2-4}{x+2}\right)dx$

3) $\int\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x}-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+4e^x\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{12}{3+3x^2}-3\cos x+\frac{x^2-9}{x-3}\right)dx$

4) $\int\left(\frac{8}{\sqrt{5+x^2}}+\frac{6+x^3}{x^4}-3\sqrt[8]{x^5}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{6}{2x^2+2}-2\sin x+3^x\right)dx$

5) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{4x^2-1}{x^3}-2\sqrt[8]{x^3}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{6}{3x^2-9}+\frac{3\sin^3 x-5}{\sin^2 x}\right)dx$

6) $\int\left(\frac{3\cos^3 x-2}{\cos^2 x}-5\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{16}{2x^2-8}-\frac{3-x^3}{x^4}+5^x\right)dx$

Задание 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

1) $\int\frac{dx}{\sin^2 3x}$ $\quad\int\frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$ $\quad\int e^{1-3x}\,dx$

2) $\int(2x-1)\cos(x^2-x)\,dx$ $\quad\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$ $\quad\int e^{6x+5}\,dx$

3) $\int 10^{2x+1}\,dx$ $\quad\int\sin\frac{x}{2}dx$ $\quad\int\frac{dx}{5x+3}$

4) $\int x^2(3-x^3)^{10}dx$ $\quad\int\cos 2x\,dx$ $\quad\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

5) $\int \frac{dx}{x\ln x}$ $\int \sin 2x\,dx$ $\int 3^{7x-1}\,dx$

6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\int \sin(2-3x)dx$ $\int \frac{dx}{e^{3x}}$

Задание 3. Проинтегрировать по частям.

1) $\int (7x-1)\cos x\,dx$ $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

2) $\int (6-5x)e^x\,dx$ $\int (7x+5)\ln x\,dx$

3) $\int x\cos x\,dx$ $\int \operatorname{arcctg} x\,dx$

4) $\int (1+2x)\cos x\,dx$ $\int \arcsin x\,dx$

5) $\int (8x-1)\sin 5x\,dx$ $\int (6+5x)\ln x\,dx$

6) $\int xe^x\,dx$ $\int (3x+2)\ln x\,dx$

Задание 4. Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_1^2 (x^3+10x)dx$

2) $\int_{-2}^3 (3x^2+6x-2)dx$

3) $\int_1^3 (x^2-16x+3)dx$

4) $\int_0^8 (21x-19)dx$

5) $\int_{-4}^0 (x^3+8)dx$

6) $\int_{10}^{13} (2x+7)dx$

Практическая работа №84, 85 (2 часа)

Тема: Выполнение заданий по теме: Теорема Ньютона- Лейбница. Вычисление площади криволинейной трапеции.

Цель: сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления площадей, длин и объемов фигур.

Теоретические сведения к практической работе

Площади плоских фигур

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a,b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \qquad (8)$$

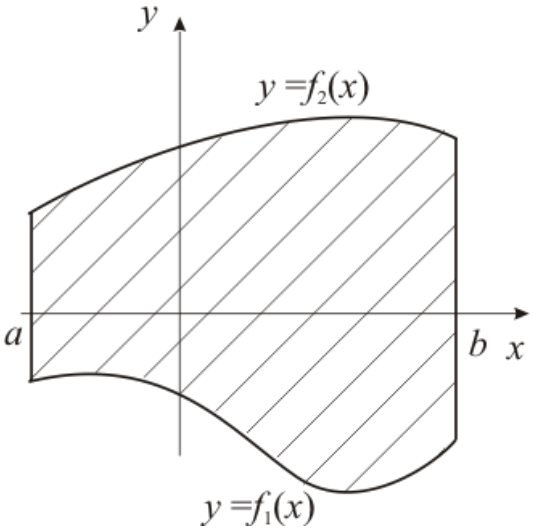


Рис. 1

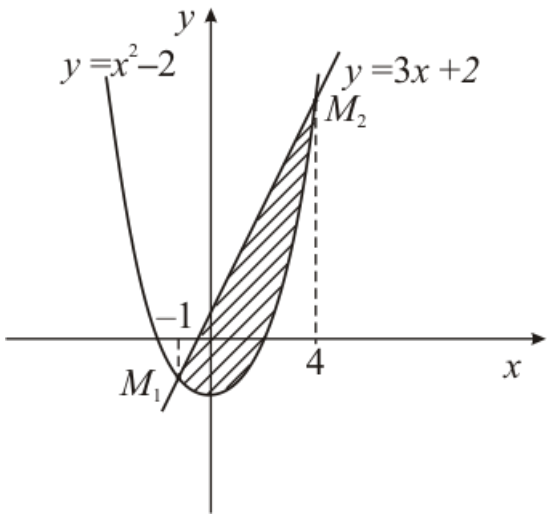


Рис. 2

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 - 2,\ y = 3x + 2.$

*Решение***.** Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0, 2)$ и $(-1, -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$, $y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$. Итак, $M_1(-1,-1)$, $M_2(4,14)$.

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой $f_2(x) = 3x + 2$, $f_1(x) = x^2 - 2$, поскольку $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [-1, 4]$. Получим:

$$S = \int_{-1}^{4} \left(3x + 2 - \left(x^2 - 2\right)\right) dx = \int_{-1}^{4} \left(3x - x^2 + 4\right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4 - \left(\frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1)\right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 =$$

$$= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв.ед.)}$$

2. Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

Если функции $y = y(t)$ и $x = x(t)$ имеют непрерывные производные первого порядка для всех $t \in [t_0, t_1]$, то площадь плоской фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [t_0, t_1]$, прямыми $x = a$, $x = b$, где $a = x(t_0)$,
$b = x(t_1)$, и осью OX, вычисляется по формуле:

$$S = \left| \int_{t_0}^{t_1} y(t) x'(t) dt \right|. \qquad (9)$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически:

$x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение. Для построения фигуры составим таблицу значений координат (x, y) точек кривой, соответствующих различным значениям параметра t, $0 \leq t \leq 2\pi$.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	2	0	–2	0	2
y	0	3	0	–3	0

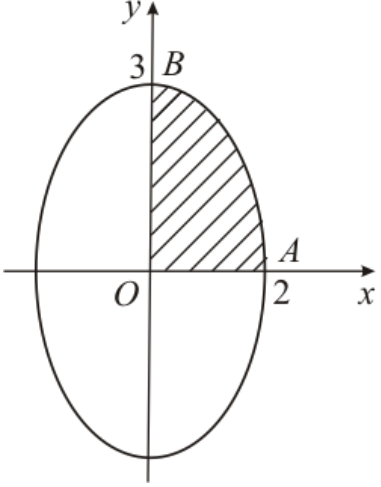


Рис. 3

Нанесем точки (x, y) на координатную плоскость XOY и соединим плавной линией. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π, соответствующая точка (x, y) описывает эллипс (известно, что $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$ — параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями a и b). Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей OX и OY, найдем её площадь S, умножив на 4 площадь криволинейной трапеции AOB. Согласно формуле (9) получим:

$$S = 4\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t\,(2\cos t)'\,dt\right| = 4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt\right| = \left\{\begin{matrix}\text{используем формулу} \\ \text{понижения степени} \\ \text{для } \sin^2\alpha \text{ из таблицы 2}\end{matrix}\right\} =$$

$$= 4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt\right| = 4\left|-3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\,dt\right| = 4\left|-3\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right| =$$

$$= 4\left|-3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0\right)\right)\right| = 4\left|-3\frac{\pi}{2}\right| = 6\pi \approx 18{,}850 \text{ (кв. ед.)}.$$

Длина дуги плоской кривой

1. Вычисление дуги плоской кривой в декартовых координатах

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную при всех $x \in [a, b]$, то длина дуги AB (рис. 4) этой кривой, заключенной между точками $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, вычисляется по формуле:

$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \qquad (10)$$

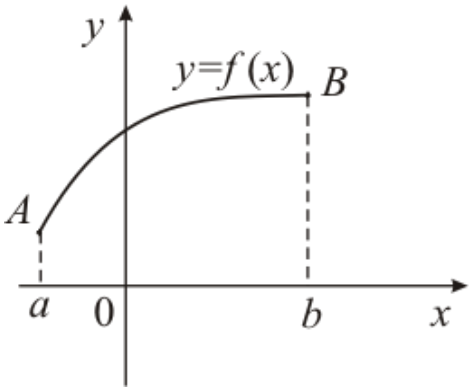


Рис. 4

2. Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически

Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_0 \le t \le t_1$, и функции $x(t)$, $y(t)$ имеют непрерывные производные 1-го порядка при всех $t \in [t_0, t_1]$, то длина дуги AB, соответствующей изменению параметра от t_0 до t_1, вычисляется по формуле:

$$l_{AB} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt. \qquad (11)$$

Пример. Найти длину дуги кривой

а) $y = x^{3/2}$, $0 \le x \le 1$; б) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Решение.

а) Так как кривая задана в декартовой системе координат уравнением $y = f(x)$, то для вычисления длины дуги воспользуемся формулой (10). Найдем y': $\quad y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$ и подставим в (10):

$$l_{AB} = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\, dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 + \frac{9x}{4}, dt = \frac{9}{4} dx, dx = \frac{4}{9} dt, \\ x = 0 \to t = 1, \\ x = 1 \to t = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}. \end{array} \right| =$$

$$= \frac{4}{9} \int_1^{13/4} t^{\frac{1}{2}} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \frac{4}{9} \left. \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right|_1^{13/4} = \frac{8}{27} \left. t^{\frac{3}{2}} \right|_1^{13/4} = \frac{8}{27} \left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) =$$

$$= \frac{8}{27} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1 \right) \approx 1{,}440 \ (\text{единиц длины}).$$

б) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Кривая задана параметрически, поэтому воспользуемся формулой (11). Найдем $x'(t)$, $y'(t)$:

$x'(t) = -2\sin t + 2\sin 2t$, $y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t$ и подставим в (11):

$$l_{AB}=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(-2\sin t+2\sin 2t\right)^2+\left(2\cos t-2\cos 2t\right)^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2 t-8\sin t\sin 2t+4\sin^2 2t+4\cos^2 t-8\cos t\cos 2t+4\cos^2 2t}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)+4\left(\sin^2 2t+\cos^2 2t\right)-8\left(\cos t\cos 2t+\sin t\sin 2t\right)}\,dt=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем тригонометрические формулы}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \text{ и } \cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{matrix}\right\}=\int_0^{2\pi}\sqrt{8-8\cos t}\,dt=$$

$$=\sqrt{8}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулу}\\ \sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1-\cos\alpha\right)\Rightarrow\\ \Rightarrow 1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\end{matrix}\right\}=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-8\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=-8\left(\cos\pi-\cos 0\right)==-8\left(-1-1\right)=16\left(\text{единиц длины}\right).$$

Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f\left(x\right)$, осью OX и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 5), то его объем вычисляется по формуле:

$$V=\pi\int_a^b\left(f\left(x\right)\right)^2dx. \qquad (12)$$

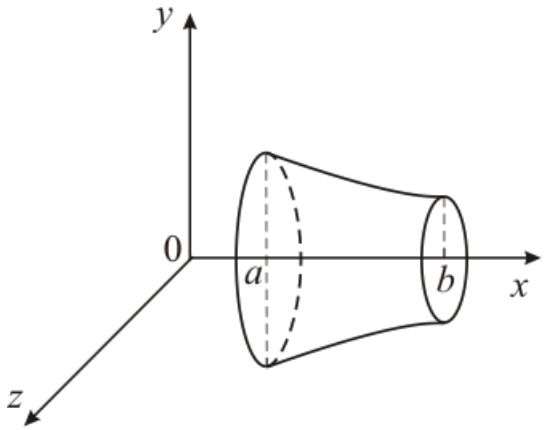


Рис. 5

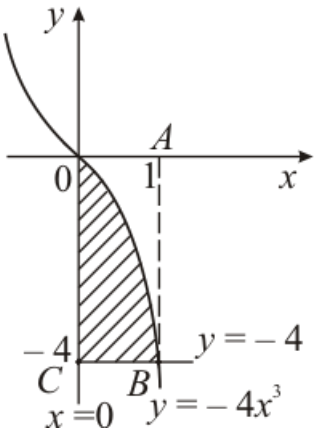


Рис. 6

Пример. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y=-4x^3$, $x=0$, $y=-4$.

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 6).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры *OABC*, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры *OAB*. Тогда искомый объем $V = V_1 - V_2$. По формуле (12) найдем V_1 и V_2:

$$V_1 = \pi\int_0^1 (-4)^2\,dx = \pi 16x\Big|_0^1 = 16\pi \text{ (ед. объема);}$$

$$V_2 = \pi\int_0^1 \left(-4x^3\right)^2 dx = 16\pi\int_0^1 x^6 dx = 16\pi\frac{x^7}{7} = \frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема);}$$

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43{,}085 \text{ (ед. объема).}$$

Содержание практической работы

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y = x^2 - 2,\ y = 1 - 2x$

2) $y = x^3,\quad y = 8,\quad x = 0$

3) $y = 3x^2 + 1,\quad y = 3x + 6$

4) $y = x^2,\ y = x + 1$

5) $y = x^2,\ y = 2 - x^2$

6) $y = x^2 - 1,\ y = 1 - x$

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически.

1) $x = 2t - t^2,\quad y = t(t-1),\quad 0 \le t \le 1$

2) $x = t^2 - 1,\quad y = t^3 - t,\quad 0 \le t \le 1$

3) $x = 2\sin t,\quad y = \cos t,\quad 0 \le t \le 2\pi$

4) $x = \ln t,\quad y = (t-1)(3-t),\quad 1 \le t \le 3$

5) $x = 1 - \cos t,\quad y = \sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi$

6) $x = \cos t,\quad y = 1 - \sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi$

Практическая работа №87 (1 час)

Тема: Выполнение заданий по теме: Свойства вероятностей.

Цель: Научиться определять тип комбинаторного объекта и рассчитывать количество выборок заданного типа.

Теоретические сведения к практической работе

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучается, сколько различных комбинаций, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Все комбинаторные формулы можно вывести из двух основных утверждений, касающихся конечных множеств – ***правило суммы и правило произведения***. Эти два важных правила часто применяются при решении комбинаторных задач.

Основными понятиями комбинаторики являются размещения, перестановки и сочетания.

1. ***Размещением из n элементов по m*** называется любое упорядоченное подмножество, состоящее из m различных элементов данного множества.

a) *Число размещений (без повторений) из n элементов по m элементам равно* $\boldsymbol{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}}$

Пример 1. Сколькими способами можно выбрать председателя, заместителя и профорга из 9 человек?

Решение. n = 9, m = 3.

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9*8*7*6!}{6!} = 504$$

b) *Число размещений (с повторением) из n элементов по m равно* $\boldsymbol{\overline{A}_n^m = n^m}$**.**

Пример 2. Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 9 вагонам?

Решение. Так как в один вагон могут сесть несколько человек, и рассадка зависит от того кто в каком вагоне находится, то используем формулу размещения с повторениями:$\boldsymbol{\overline{A}_9^7 = 9^7}$

2. ***Перестановкой из n элементов*** называется размещение из n элементов по n элементам.

a) *Число перестановок n различных элементов (без повторений) равно* $P_n = n!$

Пример 3. В соревнованиях по фигурному катанию принимали участие россияне, итальянцы, украинцы, немцы, китайцы и французы. Сколькими способами могут распределиться места по окончании соревнований?

Решение. Используем формулу перестановки без повторения для n = 6:

P_6=6! = 1*2*3*4*5*6 = 720

b) *Число перестановок (с повторениями) равно* $\overline{P_k} = \frac{k!}{i_1!i_2!\ldots i_n!}$

Пример 4. Сколько перестановок можно получить из букв слова КОЛОКОЛА?

Решение. Так как буквы в слове повторяются, то используем формулу перестановок с повторениями.

i_1 = 2 (количество букв «к»)

i_2 = 3 (количество букв «о»)

i_3 = 2 (количество букв «л»)

i_4 = 1 (количество букв «а»)

k = $i_1 + i_2 + i_3 + i_4$ = 2+3+2+1 = 8

$$\overline{P_8} = \frac{8!}{2!\,3!\,2!\,1!} = \frac{8*7*6*5*4*3*2*1}{2*1*3*2*1*2*1} = 8*7*5*3*2 = 1680$$

3. ***Сочетанием из n элементов по m*** называется любое подмножество, состоящее из m различных элементов данного множества

a) *Число сочетаний из n элементов по m(без повторений) равно* $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Пример 5. Из учащихся 25 человек нужно выбрать троих дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. n = 25, m = 3.

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3!\,(25-3)!} = \frac{25!}{3!\,22!} = \frac{25*24*23*22!}{3*2*1*22!} = 25*4*23 = 2300$$

b) *Число сочетаний с повторениями равно* $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$

Пример 6. Сколькими способами можно купить 6 пирожных, если имеются 2 сорта пирожных по 5 в каждом?

Решение. Поскольку при покупке пирожных порядок их расположения не важен, то используем для подсчета формулу сочетаний с повторениями, при этом n = 5 +5 =10, m = 6.

$$\overline{C}_{10}^6 = C_{10+6-1}^6 = C_{15}^6 = \frac{15!}{6!\,(15-6)!} = \frac{15!}{6!\,9!} = \frac{15*14*13*12*11*10*9!}{6*5*4*3*2*1*9!} = 5005$$

Содержание практической работы

	I вариант	II вариант

1.	Сколькими способами могут восемь человек стать в очередь к театральной кассе?	Курьер должен разнести пакеты в 7 различных учреждений. Сколько маршрутов может он выбрать?
2.	Сколько различных перестановок можно образовать из всех букв слова «Абракадабра»?	Сколько различных перестановок можно образовать из всех букв слова «Тарантас»?
3.	Сколькими способами из восьми человек можно избрать комиссию, состоящую из пяти членов?	Сколькими способами можно выбрать 4 краски из имеющихся 9 различных красок?
4.	Сколько четырехбуквенных слов можно образовать из букв слова «Сапфир»?	Сколько трехбуквенных слов можно составить из букв слова «Фонарь»?
5.	Имеется 10 различных книг и 15 различных журналов. Сколькими способами можно составить посылку из 3 книг и 5 журналов?	На первой полке стоит 12 книг, а на второй 10. Сколькими способами можно выбрать 4 книги с первой полки и 3 со второй?
6.	Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?	Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
7.	Сколькими способами можно составить набор из 5 шоколадок, если имеются шоколадки трех сортов?	Сколькими способами можно составить коллекцию из 6 марок, если имеются марки четырех видов?
8	Имеется 10 билетов денежной лотереи и 12 билетов спортлото. Сколькими способами можно выбрать по два билета либо из первой, либо из второй лотереи?	Сколькими способами можно группу из 13 человек разбить на две подгруппы, в одной из которых должно быть не более четырех, а во второй – не более десяти человек?

Практическая работа №88 (1 час)

Тема: Выполнение заданий по теме: Теорема о сумме вероятностей.
Цель: Научиться вычислять вероятности суммы совместных и несовместных событий, произведения независимых и зависимых событий.

Теоретические сведения к практической работе

1. *Суммой* A + B двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий.

a. *Теорема сложения вероятностей несовместных событий*. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

b. *Теорема сложения вероятностей совместных событий*. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB)$$

2. *Произведением* двух событий А и В называют событие АВ, состоящее в совместном появлении этих событий.

a. *Теорема произведения для независимых событий*. Для независимых событий вероятность совместного появления событий равна произведению вероятностостей этих событий:

$P(AB) = P(A)\,P(B)$.

b. *Теорема умножения вероятностей*. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$P(AB) = P(A)\,P_A(B)$.

3. *Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий.*

Если события A_1, A_2, A_3,… A_n независимы в совокупности, причем $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, $P(A_3) = p_3$ и т.д.; q_1, q_2, q_3, …, q_n – вероятности противоположных событий.

Вероятность наступления события А, состоящего в наступлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, A_3,… A_n равна:

$P(A) = 1 - q_1q_2q_3\ldots q_n$.

4. *Вероятность появления только одного из двух событий.*

$P(A) = p_1q_2 + p_2q_1$

Содержание практической работы

I вариант	II вариант
Среди сотрудников фирмы 28% знают английский язык, 30% – немецкий; английский и немецкий – 8%. Найти вероятность того, что случайно выбранный сотрудник фирмы знает хотя бы один язык.	Имеется 3 ящика, содержащих по 20 деталей. В первом ящике 12, во втором 5 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.
Производится бомбометание по трем складам боеприпасов, причем сбрасывается одна бомба. Вероятность попадания в первый склад 0,025; во второй – 0,03; в третий 0,019. При попадании в один из складов взрываются все три. Найти вероятность того, что склады будут взорваны.	В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны: p, = 0,1; p, = 0,15; p, = 0,2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет (не работает хотя бы 1 элемент).
Имеется 3 ящика, содержащих по 15 деталей. В первом ящике 5, во втором 7 и в третьем 10 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того,	Среди студентов группы 15% имеют отличные оценки по математике, 34% – по истории. При этом 12% являются отличниками по обеим дисциплинам. Найти вероятность того,

что все детали окажутся стандартными.	что случайно выбранный студент учится на «отлично» хотя бы по одной дисциплине.
Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.	В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена. *Решить задачу двумя способами.*
На полке стоят 6 учебников по математике и 3 по информатике. С полки наудачу берется сначала один учебник. Потом второй. Найти вероятность, что первая взятая книга будет учебником по информатике, а вторая учебником по математике.	В ящике находится 8 стандартных и 6 нестандартных детали. Наудачу вынимается сначала одна деталь, а потом вторая. Найти вероятность, что первая взятая деталь стандартная, а вторая нестандартная.

Практическая работа №89 (1 час)

Тема: Вычисление вероятностей.

Цель: Научиться вычислять вероятность события по классической формуле определения вероятности с использованием формул комбинаторики.

.

Теоретические сведения к практической работе

Согласно классическому определению вероятности ***вероятностью события А*** называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Вероятность события А определяется формулой:

P(A) = m/n,

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих А;

n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Пример 1. В ящике имеется 10 красных и 8 синих шаров. Наудачу вынимают один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется синим.

Решение.

Дано:	Решение
m= 7	А – извлеченный шар синего цвета
n = 10+8 = 18	P(A) = m/n = 7/18 = 0,38 = 38,9%
P(A) - ?	Ответ: P(A) = 38,9%

Пример 2. Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна 5.

Решение.

Дано:	Решение
k = 6 – количество граней кубика.	A – сумма выпавших очков на двух кубиках равна 5. P(A) = m/n Событию Аблагоприятствуют следующие исходы: (1,4), (4,1), (2,3), (3,2) → m= 4 Каждый из кубиков можно бросить шестью способами. Тогда два кубика по правилу умножения могут упасть 6*6 = 36 способами → n= 36 P(A) = 4/36 = 1/9 = 0,11 = 11%
P(A) - ?	Ответ: P(A) = 11%

Пример 3. В мешочке имеется 6 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, р, ф, а, ь, н.Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных в одну линию кубиках можно будет прочесть слово «фонарь».

Решение.

Дано:	Решение
о, р, ф, а, ь, н	A – из кубиков сложилось слово «фонарь». P(A) = m/n Т.к. из данных букв слово «фонарь» можно сложить только одним способом, то событию Аблагоприятствует 1 исход. → m= 1. Количество всех возможных способов выпадения букв на кубиках равно количеству перестановок. n= P_6 = 6! = 1*2*3*4*5*6 = 720 P(A) = 1/720 = 0,00139 = 1,4%
P(A) - ?	Ответ: P(A) = 1,4%

*Пример 4.*В группе 25 студентов. Из них 12 юношей и 13 девушек. Известно, что к доске должны быть вызваны двое учащихся. Какова вероятность, что это юноши?

Решение.

Дано:	Решение
K = 12 L = 13 H = 25	A – к доске вызваны два юноши. P(A) = m/n Число всех исходов равно количеству способов, которыми можно выбрать двух учащихся из 25 (причем порядок вызова к доске не важен) → n = C_{25}^{2}=300 Число благоприятствующих исходов равно числу способов выбора двух юношей из 13 → m= $C_{13}^{2} = 78$. P(A) = 78/300=13/50 = 0,26 =26%
P(A) - ?	Ответ: P(A) = 26%

Для решения задач следующего типа:

В партии из N деталей имеется *n* стандартных. Наудачу отобраны *m* деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно *k* стандартных.

можно использовать формулу: $P = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$.

Содержание практической работы

I вариант	II вариант
В коробке лежат 6 красных и 4 синих карандаша. Наугад вытаскиваются один из них. Найти вероятности событий того, что извлеченный карандаш красного цвета.	В коробке лежат 3 красных, 6 синих и 5 зеленых карандашей. Наугад вытаскиваются один из них. Найти вероятности событий того, что извлеченный карандаш красного цвета.
Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна 6.	Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна 8.
Слово ПЛОМБИР разрезается на буквы. Буквы перемешиваются и снова складываются слева направо. Найти вероятность того,что снова получится слово ПЛОМБИР.	Из буквы разрезной азбуки составлено слово ДОКУМЕНТ. Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получится слово ДОКУМЕНТ
В пачке находятся одинаковые по размеру 10 тетрадей в линейку и 6 в клетку. Из пачки наугад берут 4 тетради. Какова вероятность того, что все 4 тетради окажутся в клетку?	На полке лежат 5 учебников и 6 художественных книг. С полки наугад снимают 3 книги. Какова вероятность того, что они окажутся учебниками?
На каждой из семи одинаковых карточек напечатана одна из букв: а, с, т, р, у, ж, л. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность, что на четырех, вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках можно будет прочесть	На каждой из семи одинаковых карточек напечатана одна из букв: д, а, т, о, с, ж, к. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность, что на пяти, вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках можно будет прочесть слово «доска»

слово «стул»	
В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.	В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.
В сборнике билетов по геометрии всего 25 билетов, в трех из них встречается вопрос о конусе. На экзамене школьник достается один случайно выбранный билет из этого сборника. Найти вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о конусе.	В международных соревнованиях по фигурному катанию участвуют 25 спортсменок из разных стран, в том числе по три из США и России и по две из Японии и Швеции. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, будет представлять какую-то другую из оставшихся стран?

Практическая работа №90 (1 час)

Тема: Решение прикладных задач.

Цель: Сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей.

Теоретические сведения к практической работе

Классическое определение вероятности

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью P(A) события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числу n всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n = 30, m = 30 - 2 = 28$$

$$P = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Аксиомы вероятностей:

Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число P(A), называемое вероятностью события A.

Если события A_1, A_2 … попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю P=0.

Вероятность достоверного события равна единице P=1.

Вероятность произвольного случайного события A заключается между 0 и 1: 0<P(A)<1.

Пример 2: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

Решение: Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность $p = \frac{11}{34}$

События A и B называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События A и B называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Пример 3: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: Т.к. события совместны, то $p = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 1,5 - 0,56 = 0,94$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: P(A+B)=P(A)+P(B).

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: P(AB)=P(A)·P(A/B) или P(BA)=P(A)·P(B/A)

Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей сомножителей: P(AB)=P(A)·P(B).

Пример 4: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных.

Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

Решение: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки

$n_1 = 10$

$m_1 = 4$

$p_1 = \frac{4}{10}$

$n_2 = 10$

$m_2 = 3$

$p_2 = \frac{3}{10}$

Тогда вероятность того, что обе ручки красные: $p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} = 0{,}12$

Полная вероятность. Формула Байеса

Если событие А может произойти только при выполнении одного из событий H_1, H_2, …, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события А вычисляется по формуле

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) + \ldots$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и $p(\mathrm{A}) \neq 0$, то выполняется равенство, называемое формулой Байеса:

$$p(\mathrm{H}_i / \mathrm{A}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_i) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_i)}{p(\mathrm{A})}$$

Пример 1: В первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

Решение: Пусть событие А – наудачу взятая лампа проработает заданное время.

Тогда, пусть H_1 – лампа из первой партии, H_2 – лампа из второй партии и H_3 – лампа из третьей партии. Тогда событие A/H_1 – лампа из первой партии проработает заданное время, A/H_2 – лампа из второй партии

проработает заданное время и A/H_3 – лампа из третьей партии проработает заданное время. Найдем вероятности:

$$n = 20 + 30 + 50 = 100$$

$$p(H_1) = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$p(H_2) = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$p(H_3) = \frac{50}{100} = 0,5$$

$$p(A/H_1) = 0,7$$

$$p(A/H_2) = 0,8$$

$$p(A/H_3) = 0,9$$

$$p(A) = p(H_1) \cdot p(A/H_1) + p(H_2) \cdot p(A/H_2) + p(H_3) \cdot p(A/H_3) =$$

$$= 0,2 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,9 = 0,14 + 0,24 + 0,45 = 0,83$$

Теперь, используя формулу Байеса найдем вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии

$$p(H_1/A) = \frac{p(H_1) \cdot p(A/H_1)}{p(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,7}{0,83} \approx 0,169$$

Пример 2: Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 5 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Решение: Пусть событие А – извлекается белый шар.

Тогда, пусть H_1 – шар из первой урны, H_2 – шар из второй урны и H_3 – шар из третьей урны. Тогда событие A/H_1 – белый шар из первой урны, A/H_2 – белый шар из второй урны и A/H_3 – белый шар из третьей урны. Найдем вероятности

$$p(H_1) = \frac{1}{3}$$

$$p(H_2) = \frac{1}{3}$$

$$p(H_3) = \frac{1}{3}$$

$$p(A/H_1) = \frac{5}{12}$$

$$p(A/H_2) = 1$$

$$p(A/H_3) = 0$$

$$p(A) = p(H_1) \cdot p(A/H_1) + p(H_2) \cdot p(A/H_2) + p(H_3) \cdot p(A/H_3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{5}{36} + \frac{1}{3} = \frac{17}{36}$$

Формула Бернулли

1) Вероятность того, что событие А наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли $P_n(\mathrm{m}) = \mathrm{C}_n^m\ p^m(1-p)^{n-m}, m = 0,1,2,...,n$

Пример 1: Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

Решение:

$$p = 0,2$$
$$n = 6$$
$$m = 2$$
$$P_n(\mathrm{m}) = \mathrm{C}_n^m\ p^m(1-p)^{n-m} = \mathrm{C}_6^2\, 0,2^2(1-0,2)^{6-2} = \frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0,04\cdot 0,8^4 \approx 0,246$$

2) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна $P_n(\mathrm{m} \geq 1) = 1 - \mathrm{q}^n, q = 1 - p$

Пример 2: Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

Решение:

$$p = 0,6 \Rightarrow \quad q = 0,4$$
$$n = 6$$
$$m \geq 1$$
$$P_6(\mathrm{m} \geq 1) = 1 - 0,4^6 \approx 0,9959$$

3) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m_1 и не более m_2 раз вычисляется по формуле $P_n(\mathrm{m}_1 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{m}_2) = \sum_{m_1}^{m_2} P_n(\mathrm{m})$

Пример 3: Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

Решение:

$$p = 0,7$$
$$n = 5$$
$$2 \le m \le 4$$
$$P_5(2 \le m \le 4) = C_5^2 \cdot 0,7^2 (1-0,7)^{5-2} + C_5^3 \cdot 0,7^3 (1-0,7)^{5-3} + C_5^4 \cdot 0,7^4 (1-0,7)^{5-4} \approx 0,801$$

4) Наивероятнейшее значение m_0 числа наступления события А при проведении n повторных независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле
$$np - q \le m_0 \le np + p$$
$$np - (1-p) \le m_0 \le np + p$$

Пример 4: Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в партии.

Решение:

$$p = 0,05$$
$$n = 50$$
$$m_0 - ?$$
$$q = 1 - p = 1 - 0,05 = 0,95$$
$$50 \cdot 0,05 - 0,95 \le m_0 \le 50 \cdot 0,05 + 0,05$$
$$1,55 \le m_0 \le 2,55$$
$$m_0 = 2$$

Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики

Случайная величина X – это числовая функция $X = f(\omega_i)$, определенная на пространстве элементарных событий. Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются дискретными. Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности. Соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называют распределением вероятностей случайной величины. Для дискретной случайной величины это соответствие может быть записано в виде таблицы: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности $M(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(\mathrm{X}) = M(\mathrm{X} - M(\mathrm{X}))^2$. Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:

$$D(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m\right)^2 p_i$$

$$D(\mathrm{X}) = M(\mathrm{X}^2) - (M(\mathrm{X}))^2$$

Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{D(\mathrm{X})}$.

Если случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей, то

$$M(\mathrm{X}) = \mathrm{np} \quad D(\mathrm{X}) = \mathrm{npq}$$

Пример 1: Случайная величина X задана таблицей распределения вероятностей. Найти M(X), D(X), σ(X).

x_i	2	5	8	9
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Решение:

$$M(\mathrm{X}) = 2 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}4 + 8 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 + 2 + 2{,}4 + 1{,}8 = 6{,}4$$
$$M(\mathrm{X}^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}4 + 64 \cdot 0{,}3 + 81 \cdot 0{,}2 = 45{,}8$$
$$D(\mathrm{X}) = 45{,}8 - 6{,}4^2 = 4{,}84$$
$$\sigma(X) = \sqrt{D(\mathrm{X})} = \sqrt{4{,}84} = 2{,}2$$

Пример 2: Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

Решение:

$$M(\mathrm{X}) = 100 \cdot 0{,}05 = 5$$
$$D(\mathrm{X}) = 100 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 4{,}75$$
$$\sigma(X) = \sqrt{D(\mathrm{X})} = \sqrt{4{,}75} = 2{,}18$$

Содержание практической работы

Задание 1. Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

5. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе - 0,7, в третье - 0,85. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

6. В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными? Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

7. В партии из 25 деталей находятся 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

8. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события А того, что выпадет хотя бы одна шестерка.

9. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.

10. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

Практическая работа №91 (2 часа)

Тема: Представление числовых данных. Прикладные задачи.

Цель: Сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей.

Содержание практической работы

Задание 1. Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующие задачи:

1. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 2 урны?

2. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру =0,5, ко второму =0,6. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером =0,94, а вторым =0,92. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная равна 0,9, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартная.

Задание 2. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.

3. Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время Т равна 0,5. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время Т прибор будет работать безотказно?

Задание 3. Найти числовые характеристики дискретных случайных величин:

1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

2. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

3. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

Практическая работа №92 (2 часа)

Тема: Нахождение корней уравнений. Равносильность уравнений. Преобразование уравнений.

Цель: Владение стандартными приемами находить корни, обобщать, систематизировать, видеть равносильность преобразования уравнений.

Содержание практической работы

1вариант

1.Уравнения x^2-9=0 и (x+3)*(3x-18)=0 - равносильны?

2.Решить 2-мя способами уравнение: $\sqrt{3x+16}$=x+2 и сделать вывод.

3.Равносильны ли уравнения: $5^{x+1}+5^x=750$ и $x^2-9=0$?

4.Решить уравнение: sin4x=0 и вычислить полученный результат при k=0; ±2

5.Найти корень уравнения: $|4x-5|=15$

2 вариант

1.Уравнения x^2-64=0 и (x+8)*(4x-32)=0 - равносильны?

2.Решить 2-мя способами уравнение: $\sqrt{x+23}=x+3$ и сделать вывод.

3.Равносильны ли уравнения: $6^{x+2}-6^x=35$ и $x^2=0$?

4.Решить уравнение: cos6x=1 и вычислить полученный результат при k=0; ±12.

5.Найти корень уравнения: $|4x+7|=15$.

Практическая работа №93 (2 часа)

Тема: Нахождение основных приемов решения уравнений.

Цель: Формирование умения применять различные методы решения иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений.

Теоретические сведения к практической работе

Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня, называются *иррациональными*. Основной метод решения иррациональных уравнений – возведение обеих частей уравнения в степень. При решении иррациональных уравнений, полученные корни требую проверки.

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня. К простейшим иррациональным уравнениям относятся уравнения вида:

Метод решения иррационального уравнения состоит в сведении его к рациональному алгебраическому уравнению, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием.

Главный способ избавиться от корня и получить рациональное уравнение – возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень, которую имеет корень, содержащий неизвестное, и последующее «освобождение» от радикалов по формуле .

Если обе части иррационального уравнения возвести в одну и ту же степень и освободиться от радикалов, то получится уравнение, равносильное исходному.

Пример 1. Решить уравнение .

Решение:

Возведем обе части этого уравнения в квадрат

и получим:

$\Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow$,

откуда следует, что .

Проверка:

: $\Leftrightarrow$. Это неверное числовое равенство, значит, число не является корнем данного уравнения.

: $\Leftrightarrow$. Это верное числовое равенство, значит, число является корнем данного уравнения.

Ответ: .

2.*Показательные уравнения* – это уравнения, в которых неизвестное содержится в показателе степени. Для решения показательных уравнений и необходимо, в первую очередь, пользоваться свойствами показательной функции.

Уравнение $a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)}$ равносильно уравнению $f_1(x) = f_2(x)$ при $a > 0$, $a \neq 1$;

Методы решения показательных уравнений:

1. Сведение обеих частей уравнения к одному основанию.
2. Вынесение за скобки общего множителя.

3. Замена переменной (приведение показательного уравнения к квадратному).

Пример 2. Решите уравнение $3^{5x+2}=81^{x-1}$.

Решение**.** Данное уравнение равносильно уравнению

$3^{5x+2}=3^{4x-4} \Leftrightarrow 5x+2=4x-4 \Leftrightarrow x=-6$.

Ответ**:** -6.

3.*Логарифмические уравнения* – это уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма.

Решение большинства логарифмических уравнений после некоторых преобразований сводится к решению логарифмического уравнения вида $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ или совокупности таких уравнений.

4.*Тригонометрические уравнения*.

1). Простейшие тригонометрические уравнения (вида $f(x) = a$).

$\sin x = a\ (|a| \le 1) \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$

$\cos x = a\ (|a| \le 1) \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$

$tg\ x = a\ (a \in R) \Rightarrow x = arctg\ a + \pi n,\ n \in Z.$

$ctg\ x = a\ (a \in R) \Rightarrow x = arcctg\ a + \pi n,\ n \in Z.$

Решение более сложных тригонометрических уравнений требует знания формул, выражающих свойства тригонометрических функций.

2). Способ замены.

Этот способ следует применять в том случае, когда после преобразований получаем некое алгебраическое уравнения относительно тригонометрической функции.

Уравнение вида $a(\sin x + \cos x) + b \sin 2x = c$ решаем, используя замену $\sin x + \cos x = t$. Тогда $1 + \sin 2x = t^2$, а уравнение после замены приобретает вид:

$at + b(t^2 - 1) = c.$

Содержание практической работы

1 вариант	*2 вариант*	*3 вариант*	*4 Вариант*
1. .Решите иррациональные уравнения:			
$\sqrt{4+x} = \sqrt{2x-1}$	$x+1 = \sqrt{1-x}$	$\sqrt{3+x} = \sqrt{5-x}$	$x-3 = \sqrt{x-1}$
2. Решите показательные уравнения:			
$2^{3x} \cdot 3^x = 576$	$5^x - 2 \cdot 5^{x-2} = 23$	$4^{2x+1} + 3 \cdot 4^{2x-1} - 5 \cdot 4^{2x} = 64$	$36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$
3. Решите логарифмические уравнения:			
$\log_3(x^2+5x+5) = \log_3(x^2-x+5)$	$\log_{2002}(2x^3+x^2-x-48) = \log_{2002}(2x^3+3x-3)$.	$\log_{7x}2+\log_{7x}4+\log_{7x}5 = \log_{7x}(x+33)$.	$\log_{\lvert 2x+13 \rvert}27=3$.
4. Решите тригонометрические уравнения:			

$\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$	$\cos^2 x + 5\cos x - 6=0$	$\sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0$	$2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0$
3sin2x-4cosx+3sinx-2= =0	3sin2x-3cosx+2sinx- -1=0	2sin2x+cosx+4sinx+1= 0	2sin2x-4cosx+3sinx-3=0

Контрольные вопросы

1.Дайте определение иррационального уравнения.

2.Какой основной способ решения иррациональных уравнений?

3. Какие уравнения называются показательными? Назовите методы их решения.

4.Перечислите методы решения логарифмических уравнений.

Практическая работа №94 (1 час)

Тема: Решение систем уравнений.

Цель: Сформировать умение исследовать и использовать различные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Теоретические сведения к практической работе

1. Системы линейных уравнений (общие сведения)

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ---------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Решением системы (1) называется совокупность чисел (k_1, k_2, …, k_n), которая при подстановке в систему (1) вместо неизвестных обращает каждое уравнение системы в тождество. Система может иметь решение, тогда она называется *совместной*, причем, если решение единственное, *система определенная*, если решений множество – *система неопределенная*. Если система не имеет решений, она называется *несовместной*. Рассмотрим два способа решения системы: метод Крамера и метод Гаусса.

2. Метод Крамера

При решении методом Крамера используем определители n-го порядка. Пусть задана система (1). Составим главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ТЕОРЕМА. Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то систему (3) можно решить по формуле Крамера, причем это решение единственное:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \qquad \dots; \qquad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta},$$

где определитель Δx_i может быть получен из главного определителя путем замены i-го столбца на столбец из свободных членов.

Пример 1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}.$

Составляем главный определитель, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

и три вспомогательных определителя:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δx_1 составлен из определителя Δ путем замены элементов первого столбца свободными членами системы уравнений. В определителях Δx_2 и Δx_3 соответственно второй и третий столбцы заменены свободными членами. Вычислим все четыре определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 12 + 21 + 10 - 21 + 6 = 33;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 20 + 48 + 7 + 40 - 84 + 2 = 33$$;

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 24 + 24 - 2 - 24 + 12 = 33$$;

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -40 + 4 + 84 + 40 - 7 - 48 = 33$$.

Неизвестные x_1, x_2, x_3 находим по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \qquad x_1 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \qquad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta};$$

$$x_1 = \frac{33}{33} = 1; \qquad x_2 = \frac{33}{33} = 1; \qquad x_3 = \frac{33}{33} = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.

Пример2. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Выписываем *A* - матрицу системы и *B* - столбец свободных членов:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$. Далее вычисляем определители:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16-4) - (-1)(12+16) - 1(-6-12) = 60 \neq 0$$;

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-4) - (-1)(44+22) - 1(-22-44) = 180$$;

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2(44+22) - 4(12+6) - 1(33-33) = 60$$;

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2(44+22)-(-1)(33-33)+4(-6-12) = 60$$

.

По теореме Крамера $x_1 = \frac{|A|_1}{|A|} = \frac{180}{60} = 3$; $x_2 = \frac{|A|_2}{|A|} = \frac{60}{60} = 1$; $x_3 = \frac{|A|_3}{|A|} = \frac{60}{60} = 1$.

Ответ: $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$.

Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2 \cdot 3 - 1 - 1 \equiv 4$, $3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \equiv 11$, $3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \equiv 11$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

Условия неопределенности и несовместности системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

Если определитель системы $\Delta = 0$, то система является либо несовместной (когда $\Delta_{x_1} \neq 0$ и $\Delta_{x_2} \neq 0$), либо неопределенной (когда $\Delta_{x_1} = 0$ и $\Delta_{x_2} = 0$). В последнем случае система сводится к одному уравнению, а другое является следствием этого уравнения.

Условия несовместности системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно записать в виде:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{в_1}{в_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Условия неопределенности системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно записать в виде:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{в_1}{в_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Если один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то система уравнений (1) не имеет решения (если $\Delta = 0$).

Если главный и все вспомогательные определители равны нулю, то система (1) имеет бесконечно много решений.

Если главный определитель отличен от нуля, то система уравнений (1) имеет единственное решение.

3. Метод Гаусса

Эффективным методом решения и исследования систем линейных уравнений является метод последовательного исключения неизвестных, или метод Гаусса.

Идея метода Гаусса состоит в том, что данная система линейных уравнений преобразуется в равносильную ей систему специального вида, которая легко исследуется и решается.

Пример 3.

$$\begin{cases} 5x+3y-z=7 \\ 2x-3y+2z=9 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}.$$

В результате элементарных преобразований добиваются того, чтобы в последнем уравнении системы осталось одно неизвестное (z), во втором – 2 неизвестных (y и z) а в первом – 3 неизвестных (x, y, z). За ведущее уравнение берется то, в котором коэффициент при x равен 1. Если такого уравнения нет, то его легко получить, разделив любое из уравнений системы на коэффициент при x.

Ведущим уравнением данной системы будет последнее. Перепишем систему так:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-3y+2z=9 \\ 5x+3y-z=7 \end{cases} \quad (2)$$

Умножаем первое уравнение на (-2) и складываем со вторым, чтобы избавиться от x во втором уравнении. Результат сложения записываем на месте второго уравнения. Далее первое уравнение умножаем на (-5) и складываем с третьим, чтобы избавиться от x в третьем уравнении. Результат записываем на месте третьего уравнения. Первое уравнение при этом переписываем без изменений. Получим:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ \quad -7y-16z=2 \\ \quad -7y-4z=7 \end{cases} \quad (3)$$

Системы уравнений (2) и (3) эквиваленты, т. е. они обе несовместны, или же обе совместны и имеют одни и те же решения.

Умножаем второе уравнение системы (5) на (-1) и складываем с третьим, чтобы избавиться от y в третьем уравнении. Первое уравнение при этом не трогаем. Результат записываем на месте третьего уравнения. Тогда

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ \quad -7y-16z=2 \\ \qquad\qquad 12z=5 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения $z=\frac{5}{12}$. Подставляем это значение z во втрое уравнение системы и находим y:

$$-7y-16\cdot\frac{5}{12}=2$$

$$y=-\frac{26}{21}.$$

В первое уравнение подставляем значения z и y, получаем

$$x+2\cdot\left(-\frac{26}{11}\right)+3\cdot\frac{5}{12}=1$$

$$x=\frac{187}{84}.$$

Ответ: $x=\frac{187}{84}$; $y=-\frac{26}{21}$; $z=\frac{5}{12}$.

Рекомендуется сделать проверку.

3. Матричный способ

Систему можно решить и матричным способом.

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{4}$$

Составим матрицу системы из коэффициентов при неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Из неизвестных x_1, x_2, x_3 и свободных членов составим матрицы – столбцы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Тогда система (4) в матричной форме примет вид

$$A \cdot X = B.$$

Чтобы найти матрицу X, умножим (5) на A^{-1} слева.

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Пример 4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти обратную матрицу A^{-1}.

Решение:

1) Составляем и вычисляем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 4 + 3 - 4 - 0 = 2.$$

Определитель вычислен по правилу треугольника.

2) Транспонируем матрицу. Получаем

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Вычисляем алгебраические дополнения

A_{11}; A_{12}; A_{13}; A_{21}; A_{22}; A_{23}; A_{31}; A_{32}; A_{33}.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5; \qquad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-5) = -5.$$

Вычисляем A_{12}. Вычеркиваем первую строку и второй столбец. Составляем определитель второго порядка из оставшихся элементов.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4.$$

Вычисляем $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-4) = 4$.

Аналогично вычисляем все остальные алгебраические дополнения:

$$A_{13} = 7; \quad A_{21} = 2; \quad A_{22} = -2; \quad A_{23} = -2; \quad A_{31} = 1; \quad A_{32} = 0; \quad A_{33} = -1.$$

Составим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 7 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 2 & 7/2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку

$$E = A^{-1} \cdot A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 7 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 5.

Решить систему матричным способом

$$\begin{cases} 5x + 3y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}.$$

Из коэффициентов при неизвестных составим матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Из неизвестных составим матрицу – столбец:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Из свободных членов составим матрицу – столбец:

$$B = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда система запишется в виде

$$A \cdot X = B.$$

Получили матричное уравнение. Умножаем обе части этого уравнения на A^{-1} слева. Получаем:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Находим обратную матрицу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 84; \qquad A^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & -3 \\ 4 & -16 & 12 \\ -7 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$ (матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов;

$$A^{-1} = \frac{1}{84} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 11 & -3 \\ 4 & -16 & 12 \\ -7 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$ (обратная матрица).

Умножая обратную матрицу на B, получаем матрицу X.

$$X = \frac{1}{84} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 11 & -3 \\ 4 & -16 & 12 \\ -7 & & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{84} \cdot \begin{pmatrix} 187/84 \\ -26/21 \\ 5/12 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем ответ:

$$x = \frac{187}{84}; \qquad y = -\frac{26}{21}; \qquad z = \frac{5}{12}.$$

Сравните решение этой системы с решением метода Гаусса.

Содержание практической работы

Задание 1. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x - 4y = 18 \\ 2x + 5y = 19 \end{cases}$

Задание 2. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2y}{4} - \dfrac{x-2y}{2} - \dfrac{7-2y}{3} = 1 - x \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$

Задание 3. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 4x-6y=3 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 6x-4y=2 \end{cases}$

Задание 4.

а) При каком значении *a* система $\begin{cases} 14x+32y=25 \\ 28x+ay=7 \end{cases}$ не имеет решений?

б) При каком значении *a* система $\begin{cases} 7x-12y=81 \\ 49x-ay=567 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Задание 5. Решить систему уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса матричным методом:

а) $\begin{cases} 7x_1-3x_2+5x_3=32 \\ 5x_1+2x_2+x_3=11 \\ 2x_1-x_2+3x_3=14 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1-3x_2+4x_3=6 \\ 2x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \end{cases}$

Практическая работа №95 (2 часа)

Тема: Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств.

Цель: Применить умения по владению стандартными приемами решения уравнений и систем.

Теоретические сведения к практической работе

Если графики функций пересекаются в одной точке, то уравнение имеет один корень, если в двух, то два решения.

Если графики не пересекаются, то уравнение не имеет корней.

Первый способ графического решения квадратного уравнения заключается в построении параболы $y=ax^2+bx+c$ и нахождении корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ как абсцисс точек пересечения параболы с осью *Ox*.

Если парабола пересекает ось *Ox* в двух точках, то соответствующее уравнение имеет два действительных корня; если парабола касается оси *Ox*, то уравнение имеет два равных действительных корня; наконец, если парабола не пересекает Ось *Ox*, то уравнение не имеет действительных корней.

Второй способ графического решения квадратного уравнения заключается в том, что уравнение в виде $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = -bx - c \end{cases}$

Содержание практической работы

I Вариант

II Вариант

1. Решите неравенство графически

$-x^2+6x-5\geq 0$

$-x^2+6x-9<0$

2. Решите графически систему уравнений.

$\begin{cases} x - 2y - 8 = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} xy = -2 \\ x + y = 1 \end{cases}$

3. Решить графически уравнение.

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = x - \frac{2}{3}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x < x - \frac{1}{2}$